CAPITOLO 1

IL CALCOLO COMBINATORIO

1. INTRODUZIONE

«Il calcolo combinatorio consiste nel mettere palline di colore diverso in scatolette di colore diverso e di vedere in quanti modi lo si può fare. Potrei riformulare questa definizione nel linguaggio di Wall Street, ma alla fine si tratta solo di palline e di scatolette.» (Giancarlo Rota (1932 – 1999) – matematico e filosofo di origine italiana, professore al Massachusetts Institute of Technology)

Esso trova applicazioni nel calcolo delle probabilità, in statistica, nella ricerca operativa, nell'analisi dei giochi matematici e dei problemi di scelta che spesso si presentano nel campo commerciale ed industriale. Il calcolo combinatorio studia le strategie per poter "contare" in modo efficiente configurazioni anche molto complesse. Tale problema può sembrare banale ed in effetti lo è se il numero di elementi in gioco è piccolo, poiché in questo caso è sufficiente scrivere esplicitamente tutti i possibili raggruppamenti e contarli; ma quando il numero degli elementi è elevato la difficoltà consiste proprio nel formare tutti i raggruppamenti senza tralasciarne alcuni e senza cadere in ripetizioni.

Si consideri il seguente esempio: si vogliono contare tutti gli anagrammi della parola PERA. Il problema consiste nel riempire le caselle della seguente tabella con gli elementi dell'insieme $\{P; E; R; A\}$:

1^a lettera	2^a lettera	3^a lettera	4^a lettera

Nella prima casella si può sistemare una qualunque delle quattro lettere; vi sono quindi 4 modi diversi di riempire la prima casella. Nella seconda casella sarà necessario scegliere tra le tre lettere rimaste, perciò ad ognuna delle prime 4 scelte corrispondono 3 possibili scelte della seconda lettera; si hanno quindi $4 \cdot 3$ diversi modi di riempire le prime due caselle. Avendo già scelto due lettere, ad ognuno dei 12 diversi modi di riempire le prime due caselle corrispondono 2 modi diversi di riempire la terza casella ed infine la scelta nell'ultima casella è obbligata. I modi di riempire le quattro caselle sono quindi: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

In generale vale il seguente:

PRINCIPIO FONDAMENTALE DEL CALCOLO COMBINATORIO

Se un oggetto è univocamente individuato da una sequenza di n scelte successive, tali che vi siano k_1 possibilità per la prima scelta, k_2 per la seconda, …, k_n per la n-esima, il numero totale di oggetti che si possono formare con tali scelte è il prodotto: $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$

2. PERMUTAZIONI SEMPLICI

Se si ha un insieme finito di elementi tutti distinti fra loro, ogni ordinamento di tali elementi è detto **permutazione semplice** degli elementi di tale insieme. Quindi le permutazioni semplici di n oggetti distinti sono tutti i possibili raggruppamenti formati in modo tale che ognuno contenga tutti gli n oggetti e differisca dagli altri solo per l'ordine in cui tali oggetti si presentano. Per quanto osservato nel paragrafo precedente, si ha che il numero P_n delle permutazioni di n elementi è dato dal prodotto dei primi n numeri interi, che si indica con n fattoriale:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Per convenzione si pone $0! = 1$.

ESEMPIO

Si vuole creare un PIN di sei caratteri diversi utilizzando i numeri da 1 a 6. Quante diverse possibilità vi sono?

Calcoliamo le permutazioni semplici di 6 oggetti:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Quindi abbiamo 720 possibilità diverse di creare il PIN.

3. PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

Nel caso in cui gli n elementi non siano tutti diversi fra loro, ogni loro raggruppamento è detto **permutazione con ripetizione**. E' necessario ora procedere al loro calcolo: sapendo ancora una volta che le permutazioni con ripetizione di n oggetti di cui $k_1$eguali ad a, k_2 eguali a b, …, k_m eguali a z, con $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ sono tutti i possibili raggruppamenti in modo tale che ognuno contenga tutti gli n oggetti e differisca dagli altri solo per l'ordine in cui tali oggetti si presentano, il numero delle permutazioni con ripetizione è dato da:

$$P_n^{(k_1, k_2, \ldots, k_m)} = \frac{n!}{k_1! \, k_2! \ldots k_m!}$$

ESEMPIO

Calcolare il numero degli anagrammi, anche privi di significato, della parola PAPPAGALLO.

Analizziamo la situazione:

- vi sono 10 elementi (il numero delle lettere che compongono la parola);

- 3 elementi sono uguali ad A;
- 3 elementi sono uguali a P;
- 2 elementi sono uguali a L;
- 1 elemento è uguale a O;
- 1 elemento è uguale a G.

Quindi: $P_{10}^{(3,3,2)} = \frac{10!}{3!3!2!} = 50.400$

4. DISPOSIZIONI SEMPLICI

Dati n elementi distinti ed un numero $k \leq n$, si dicono **disposizioni semplici di $\boldsymbol{n}$ elementi in classe $\boldsymbol{k}$** tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare con gli elementi dati, in modo tale che ogni raggruppamento ne contenga esattamente k tutti distinti tra loro e che due raggruppamenti differiscano fra loro o per qualche elemento oppure per l'ordine secondo il quale gli elementi sono disposti. La differenza sostanziale tra le permutazioni e le disposizioni è che nel caso delle permutazioni tutti gli elementi devono formare i raggruppamenti, mentre nelle disposizioni è possibile considerare raggruppamenti con un numero inferiore di elementi.

Il numero delle disposizioni di n elementi in classe k è dato da:

$$D_{n;k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per la stessa quantità $(n-k)!$ si ottiene:

$$D_{n;k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Nel caso in cui $k = n$ le disposizioni coincidono con le permutazioni di un insieme di n elementi.

ESEMPI

1. In una corsa ippica gareggiano 10 cavalli. Quanti sono i possibili ordini di arrivo nelle prime tre posizioni?

Si tratta di calcolare in quanti modi diversi è possibile disporre in ordine 3 cavalli scelti in un insieme di 10. Perciò:

$$D_{10;3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

2. Qual è il numero di partite di calcio da giocare in un campionato a 18 squadre?

Il risultato è dato da:

$$D_{18;2} = 18 \cdot 17 = 306$$

5. DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Si dicono **disposizioni con ripetizione di n elementi in classe k** tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare con gli elementi dati, in modo che ogni gruppo ne contenga k, ma ogni elemento possa trovarsi ripetuto nel gruppo una volta, due volte, …, fino a k volte ed in modo che ogni raggruppamento differisca dall'altro o per qualche elemento oppure per l'ordine secondo il quale gli elementi sono disposti. Poiché ogni elemento ha n possibilità di scelta in qualunque posizione si trovi nel raggruppamento, il numero delle disposizioni con ripetizione di n elementi a k a k sarà:

$$D'_{n;k} = n^k$$

In questo caso il numero k può anche essere maggiore di n.

ESEMPI

1. Quanti numeri diversi di 4 cifre si possono formare?

Gli elementi a disposizione sono 10: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Quindi: $D'_{10;4} = 10^4 = 10.000$

2. Quante colonne occorrerebbe giocare al totocalcio per essere certi di fare 13?

Per avere la certezza di fare 13 occorre giocare tutte le possibili colonne. Ogni colonna è un insieme ordinato di 13 simboli, necessariamente ripetuti, scelti fra $\{1; 2; X\}$, ossia è una disposizione con ripetizione di 3 elementi in classe 13. Quindi:

$$D'_{3;13} = 3^{13} = 1.594.323$$

6. COMBINAZIONI SEMPLICI

In tutti i casi considerati finora veniva sempre tenuto conto dell'ordine degli elementi di un certo insieme nei raggruppamenti che si dovevano formare, ma in alcune situazioni tale ordine non ha importanza; ad esempio nel gioco del lotto si estraggono senza ripetizione 5 numeri tra i 90 a disposizione, ma non interessa l'ordine con cui sono stati estratti per vincere. Si dice **combinazione semplice di n elementi in classe k** (con $k \leq n$), o anche combinazione di n elementi presi a k a k, un qualunque raggruppamento di k elementi diversi scelti fra gli n a disposizione in modo che due raggruppamenti differiscano fra loro almeno per un elemento. Le combinazioni semplici si calcolano come:

$$C_{n;k} = \frac{D_{n;\,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

oppure:

$$C_{n;k} = \frac{D_{n;\,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Tale numero prende il nome di **coefficiente binomiale** e si indica con $\binom{n}{k}$; quindi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

ESEMPI

1. In quanti modi diversi si possono estrarre i 5 numeri del lotto?

Si tratta di calcolare le combinazioni semplici di 90 oggetti in classe 5:

$$C_{90;5} = \binom{90}{5} = \frac{90!}{(90-5)!\,5!} = \frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85!}{85!\,5!} = 43.949.268$$

2. In una classe di 23 alunni si devono eleggere i 2 rappresentanti di classe. In quanti modi diversi si può fare questa scelta?

Si tratta di calcolare le combinazioni semplici di 23 studenti in classe 2:

$$C_{23;2} = \binom{23}{2} = \frac{23!}{(23-2)!\,2!} = \frac{23\cdot 22\cdot 21!}{21!\,2!} = 253$$

7. COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Le **combinazioni con ripetizione di n elementi in classe k** sono tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare con gli elementi dati, in modo che ogni gruppo ne contenga k, ma ogni elemento possa trovarsi ripetuto nel gruppo una volta, due volte, …, fino a k volte ed in modo che ogni raggruppamento differisca dall'altro per almeno un elemento. Tale definizione non è da confondersi con quella delle disposizioni con ripetizione, in quanto nel caso delle combinazioni **non** si tiene conto dell'ordine in cui compaiono gli elementi. In questo caso il numero k può anche essere maggiore di n.

Il numero delle combinazioni con ripetizione di n oggetti in classe k è dato da:

$$C'_{n;k} = \binom{n+k-1}{k}$$

ESEMPI

1. In quanti modi diversi si possono distribuire 12 pennarelli nei 5 scomparti di un astuccio?

Si tratta di calcolare le combinazioni con ripetizione di 5 oggetti in classe 12:

$$C'_{5;12} = \binom{5+12-1}{12} = \binom{16}{12} = \frac{16!}{(16-12)!\,12!} = 1.820$$

2. Risolvere il problema precedente con la condizione che in ogni scomparto vi sia almeno un pennarello.

Si distribuisce un pennarello in ogni scomparto. Ne rimangono $12-5=7$ pennarelli. Si tratta ora di calcolare le combinazioni con ripetizione di 5 oggetti in classe 7:

$$C'_{5;7}=\binom{5+7-1}{7}=\frac{11!}{4!\,7!}=330$$