CAPITOLO 3

DERIVATE E STUDIO DI FUNZIONE

1. INTRODUZIONE

L'Analisi ed il suo calcolo rappresentano la matematica del cambiamento.

Il potere dell'analisi deriva dalla sua abilità nel descrivere e predire il comportamento di quantità che cambiano. La crescita dei prezzi al consumo, il movimento di razzi spaziali, la crescita della popolazione, il decadimento radioattivo e molti altri fenomeni possono essere studiati con i metodi dell'analisi.

Tra questi, particolare rilevanza è assunta dall'operazione di derivazione delle funzioni. Nei capitoli seguenti la maggior parte dello sforzo si concentrerà su come definire formalmente l'operazione di derivazione e su come calcolarla simbolicamente. Nella costruzione di questo processo ci troveremo di fronte a varie sottigliezze e a vari problemi, ma l'idea base che sta sotto tutto il processo è semplice. La derivata nasce in ambito matematico, ma trova impiego in molti altri campi dalla fisica all'economia.

In particolare è uno strumento in grado di darci informazioni sulla velocità con cui una grandezza cambia, oppure sull'inflazione, che è la derivata del livello dei prezzi rispetto al tempo. Quando l'inflazione è maggiore di 0 (quasi sempre) i prezzi aumentano; quando l'inflazione è diminuisce, non vuol dire che i prezzi stanno diminuendo, ma solo che stanno salendo meno velocemente di prima. Dire che l'inflazione è diminuita, equivale a dire che la derivata seconda del livello dei prezzi è minore di 0.

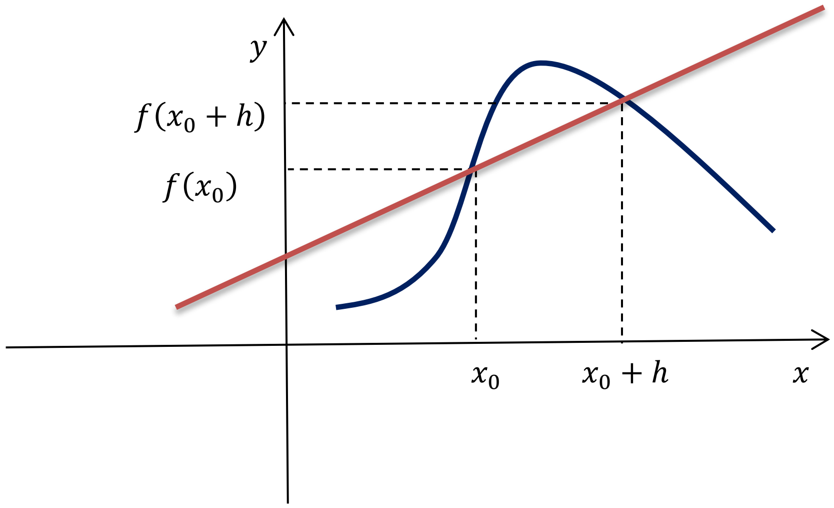
2. RAPPORTO INCREMENTALE

Consideriamo un intervallo (a,b), il punto $x_0 \in (a,b)$ ed il numero reale $h \neq 0$ tale che $x_0 + h \in (a,b)$. Data una funzione $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, la quantità

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Viene detta rapporto incrementale relativo al punto x_0 e all'incremento h.

Da un punto di vista geometrico, esso rappresenta il coefficiente angolare della retta congiungente i punti del grafico $(x_0; f(x_0))$ e $(x_0 + h; f(x_0 + h))$



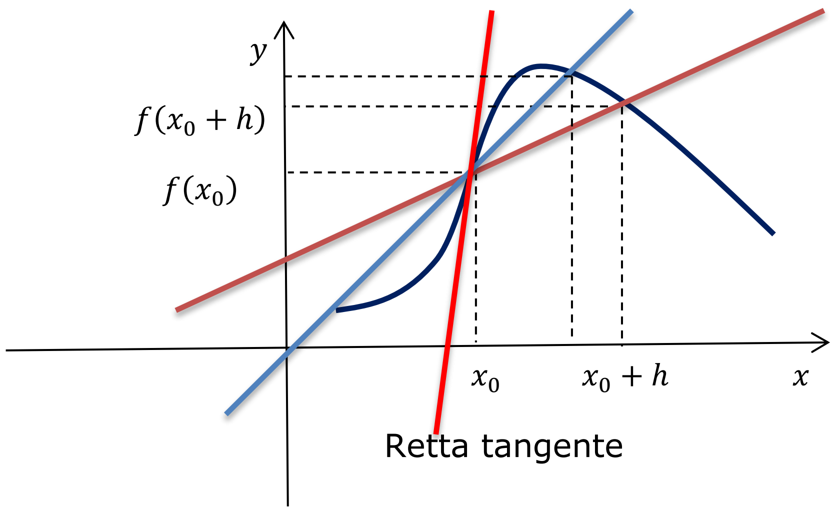
Si dice che una funzione f è derivabile in x_0 se esiste finito il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

tale limite viene chiamato derivata di f in x_0 e viene indicato con uno dei seguenti simboli:

$$\frac{df}{dx}(x_0), \qquad Df(x_0), \qquad f'(x_0)$$

Da un punto di vista geometrico $f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_0; f(x_0))$.



ESEMPI

1. Data la funzione $y = x^2$ determiniamo il rapporto incrementale e la derivata della funzione nel punto $x_0 = 2$

Determiniamo il rapporto incremetale:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x_0 + h)^2 - (x_0)^2}{h}$$

Sostituiamo il valore $x_0 = 2$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2-(2)^2}{h} = \frac{\cancel{4}+4h+h^2-\cancel{4}}{h} = \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = 4 + h$$

Per calcolare la derivata passiamo al limite del rapporto incrementale trovato $f'(2) = \lim_{h\to 0} 4 + h = 4$

2. Data la funzione $y = \frac{1}{x}$ determiniamo il rapporto incrementale e la derivata della funzione nel punto $x_0 = 1$

Determiniamo il rapporto incremetale:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{(x_0 + h)} - \frac{1}{x_0}}{h}$$

Sostituiamo il valore $x_0 = 1$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{(1+h)}-1}{h} = \frac{\frac{1-1-h}{1+h}}{h} = \frac{\cancel{h}}{1+h} \cdot \frac{1}{\cancel{h}} = -\frac{1}{1+h}$$

Per calcolare la derivata passiamo al limite del rapporto incrementale trovato $f'(1) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{1+h} = -1$

3. Data la funzione $y = \sqrt{x^2 + 2x}$ determiniamo il rapporto incrementale e la derivata della funzione nel punto $x_0 = -3$

Determiniamo il rapporto incremetale:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(x_0 + h)^2 + 2(x + h)} - \sqrt{{x_0}^2 + 2x_0}}{h}$$

Sostituiamo il valore $x_0 = -3$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(-3 + h)^2 + 2(-3 + h)} - \sqrt{3^2 + 2 \cdot (-3)}}{h} =$$

$$=\frac{\sqrt{9-6h+h^2-6+2h}-\sqrt{9-6}}{h}=$$

$$=\frac{\sqrt{h^2-4h+3}-\sqrt{3}}{h}=$$

Razionalizzando:

$$=\frac{\sqrt{h^2-4h+3}-\sqrt{3}}{h}\cdot\frac{\sqrt{h^2-4h+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{+h^2-4h+3}+\sqrt{3}}$$

$$\frac{h^2-4h+3-3}{h\left(\sqrt{h^2-4h+3}+\sqrt{3}\right)}=\frac{h^2-4h}{h\left(\sqrt{h^2-4h+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{h}{h\left(\sqrt{h^2-4h+3}+\sqrt{3}\right)}=\frac{(h-4)}{\sqrt{h^2-4h+3}+\sqrt{3}}$$

Per calcolare la derivata passiamo al limite del rapporto incrementale trovato:

$$f'(-3)=\lim_{h\to 0}\frac{(h-4)}{\sqrt{h^2-4h+3}+\sqrt{3}}=\frac{-4}{2\sqrt{3}}$$

3. PUNTI DI NON DERIVABILITA'

Sia f una funzione continua in un punto x_0 interno al suo dominio. Diciamo che x_0 è un punto di non derivabilità quando si verifica una delle seguenti condizioni:

- $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\infty$

  Il grafico f avrà in $(x_0; f(x_0))$ una retta tangente parallela all'asse y ed il punto $\boldsymbol{x_0}$ viene detto punto di flesso a tangente verticale.

- $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\neq\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ma almeno uno dei due esiste finito. In questo caso il punto x_0 viene chiamato punto angoloso. Se entrambi i limiti sono finiti si scriverà:

  $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_+(x_0)$ derivata destra

  $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_-(x_0)$ derivata sinistra

- $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\mp\infty$$

Il punto x_0 viene detto punto di cuspide.

- Un caso particolare si ha quando almeno uno dei due limiti seguenti non esiste

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

OSSERVAZIONE

Quando il punto x_0 è un punto del dominio della funzione non interno ad esso, si può calcolare solo il limite destro e sinistro del rapporto incrementale in x_0. In questo caso esisterà eventualmente solo la derivata destra o sinistra della funzione in x_0. Una situazione tipica di questa situazione si ha quando la funzione f è definita in un intervallo chiuso $[a, b]$

4. DERIVATE DI FUNZIONI ELEMENTARI

Per poter calcolare la derivata di una funzione è importante conoscere sia le derivate delle funzioni elementari sia le regole di derivazione (derivata di somma, prodotto, quoziente, funzione composta e funzione inversa). Di seguito è riportata la tabella con tutte le derivate fondamentali, suddivise per tipologia di funzione:

- derivate di funzione: costante, potenza e radice
- derivate di funzioni esponenziali
- derivate di funzioni goniometriche

FUNZIONI COSTANTI, POTENZE E RADICI	
FUNZIONE $f(x)$	**DERIVATA** $f'(x)$
Costante $f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x^{\alpha}$ con $\alpha\in\mathbb{R}$	$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$ con $n>0$	$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE	
FUNZIONE $f(x)$	**DERIVATA** $f'(x)$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x lna$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot lna} = \frac{1}{x}\log_3 e$
$f(x) = lnx$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
FUNZIONI GONIOMETRICHE	
FUNZIONE $f(x)$	**DERIVATA** $f'(x)$
$f(x) = senx$	$f'(x) = cosx$
$f(x) = cosx$	$f'(x) = -senx$
$f(x) = tanx$	$f'(x) = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x$
$f(x) = arcsenx$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = arccosx$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = arctanx$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

5. OPERAZIONI ARITMETICHE E DERIVAZIONE

Siano f e g due funzioni derivabili in un intervallo chiuso e limitato (a, b) si avranno le seguenti regole di derivazione:

1. $\boldsymbol{D(k \cdot f(x)) = k \cdot Df(x)}$ con $k \in \mathbb{R}$
2. $\boldsymbol{D(f(x) \pm g(x)) = Df(x) \pm Dg(x)}$
3. $\boldsymbol{D(f(x) \cdot g(x)) = Df(x) \cdot g(x) \pm f(x) \cdot Dg(x)}$ (si estende anche a più fattori)
4. $\boldsymbol{D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{Df(x) \cdot g(x) - Dg(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}}$

ESEMPI

1. Deriviamo la funzione: $y = 2x - 3x^2 + lnx$

Applicando la regola di derivazione della somma otteniamo:

$$y' = 2 - 3 \cdot 2x + \frac{1}{x} = 2 - 6x + \frac{1}{x}$$

Quindi $y' = 2 - 6x + \frac{1}{x}$ rappresenta la funzione derivata.

2. Deriviamo la funzione: $y = 3x - \sqrt[3]{x}$

Prima di applicare la regola di derivazione trasformiamo la radice in potenza ricordando che $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

Si può anche direttamente applicare la formula che si trova nella tabella delle derivate elementari $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Avremo quindi: $y = 3x - x^{\frac{1}{3}}$

Applicando le regole di derivazione della somma otteniamo:

$$y' = 3 - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = 3 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

Quindi $y' = 3 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ rappresenta la funzione derivata.

3. Deriviamo la funzione: $y = x^3 \cdot e^x$

Applicando la regola di derivazione del prodotto otteniamo:

$$y' = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x$$

che rappresenta la funzione derivata.

4. Deriviamo la funzione:

$$y = \frac{e^x}{x^2}$$

Applicando la regola di derivazione del quoziente otteniamo:

$$y' = \frac{e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{xe^x \cdot (x+2)}{x^4}$$

Quindi $y' = \frac{e^x \cdot (x+2)}{x^3}$ rappresenta la funzione derivata.

5. Deriviamo la funzione:

$$y = \log_3 x + 3x^2 \cdot 3^x$$

Applicando le regole della somma e del prodotto otteniamo:

$$y' = \frac{1}{x}\log_3 e + 6x \cdot 3^x + 3x^2 \cdot 3^x ln3$$

Che rappresenta la funzione derivata.

6. Deriviamo la funzione:

$$y = \frac{e^x . senx}{x^2}$$

Applicando le regole della somma e del prodotto otteniamo:

$$y' = \frac{e^x \cdot senx + e^x \cdot cosx}{(x^2)^2}$$

Quindi $y' = \frac{e^x \cdot (senx+cosx)}{x^4}$ rappresenta la funzione derivata.

6. DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

Siano date la funzioni $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(A) \subseteq B$ e consideriamo la funzione composta

$$g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

Se f è derivabile in $x_0 \in A$ e g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ allora la funzione composta $(g \circ f)$ risulta derivabile in x_0 secondo la seguente regola:

$$\boldsymbol{D(g \circ f)(x_0) = Dg(y_0) \cdot Df(x_0) = Dg\big(f(x_0)\big) \cdot Df(x_0)}$$

ESEMPI

1. Deriviamo la funzione composta: $y = (x + 2x^3)^4$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte otteniamo:

$$y' = 4(x + 2x^3)^3 \cdot (1 + 6x^2)$$

che rappresenta la funzione derivata.

2. Deriviamo la funzione composta : $y = e^{x^3-4x}$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte otteniamo:

$$y' = e^{x^3-4x} \cdot (3x^2 - 4)$$

Che rappresenta la funzione derivata.

3. Deriviamo la funzione: $y = ln(x^2 - 1)$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte otteniamo:

$$y' = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x$$

Quindi $y' = \frac{2x}{x^2-1}$ rappresenta la funzione derivata.

4. Deriviamo la funzione: $y = \sqrt[3]{2x - 3}$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte otteniamo:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(2x - 3)^2}} \cdot 2$$

Quindi $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-3)^2}}$ rappresenta la funzione derivata.

5. Deriviamo la funzione: $y = sen(x^2 + 3x)$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte otteniamo:

$$y' = cos(x^2 + 3x) \cdot (2x + 3)$$

Che rappresenta la funzione derivata

7. DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Sia data la funzioni invertibile $f: (a, b) \to \mathbb{R}$

Sia inoltre f derivabile in $x_0 \in (a, b)$ con $f'(x_0) \neq 0$, allora la funzione inversa f^{-1} risulta derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e la sua derivata sarà:

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

OSSERVAZIONE

La formula precedente è legata alla proprietà dei coefficienti angolari m ed m' delle rette simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e secondo quadrante cioè dalla relazione $\boldsymbol{m \cdot m' = 1}$

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione inversa di: $f(x) = 2x + lnx$

La funzione data è la somma di due funzioni che sono strettamente crescenti, quindi anche $f(x)$ è strettamente crescente quindi è invertibile.

Per calcolare la derivata della sua inversa dobbiamo determinare la derivata di f: $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$

Quindi:

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{2x + 1}$$

Se volessimo calcolare il valore di $Df^{-1}(y)$ nel punto $y_0 = 2$ dovremmo trovare la sua controimmagine, dal grafico seguente vediamo che è $x_0 = 1$ quindi sostituendo otteniamo $Df^{-1}(2) = \frac{1}{3}$

8. DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Sia f una funzione derivabile in un intervallo aperto (a, b), se la funzione f' risulta a sua volta derivabile in (a, b), allora è possibile definire la funzione derivata seconda $f'': (a, b) \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni $x \in (a, b)$ il valore

$$Df'(x) = f''(x)$$

Procedendo in questo modo si possono definire le derivate di ordine superiore k con $k \geq 2$. Vediamo alcuni esempi:

ESEMPI

1. Consideriamo la funzione: $f(x) = lnx$

Calcoliamo alcune delle sue derivate:

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'^{v}(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$ ....

2. Consideriamo la funzione: $f(x) = e^x$

Calcoliamo alcune delle sue derivate:

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$f'''(x) = e^x$ ....

3. Consideriamo la funzione: $f(x) = x^4$

Calcoliamo alcune delle sue derivate:

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

$f'''(x) = 24x$

$f'^{v}(x) = 24$

$f^{v}(x) = f^{v}{}'(x) = \cdots = 0$

4. Consideriamo la funzione: $f(x) = senx$

Calcoliamo alcune delle sue derivate:

$f'(x) = cosx$

$f''(x) = -senx$

$f'''(x) = -cosx$

$f'^{v}(x) = senx$ ....

9. RETTE TANGENTI ALLA FUNZIONE

Dalla definizione di derivata, sappiamo che data una funzione f, derivabile in un punto di ascissa f, il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione f nel punto x_0 è uguale alla derivata prima della funzione nel punto, cioè $m = f'(x_0)$, quindi ricordando l'equazione della retta passante per un punto $y - y_0 = m(x - x_0)$, otteniamo l'equazione della retta tangente in un punto $(x_0, f(x_0))$ della funzione:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

A volte risulta utile determinare l'equazione della perpendicolare alla retta tangente in x_0 chiamata retta normale nel punto x_0, supponendo $f'(x_0) \neq 0$ si avrà l'equazione:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

ESEMPIO

Determinare l'equazione della retta tangente e della retta normale al grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x+2}$ nel suo punto di ascissa $x = -1$.

- L'equazione della tangente è: $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$

Quindi dobbiamo calcolare $f(-1)$ e $f'(-1)$

Per determinare il valore di $f(-1)$ sostituiamo nella funzione $x = -1$, avremo: $f(-1) = \frac{1}{-1+2} = 1$

Per calcolare $f'(-1)$ dobbiamo trovare prima la derivata di $f(x)$.

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

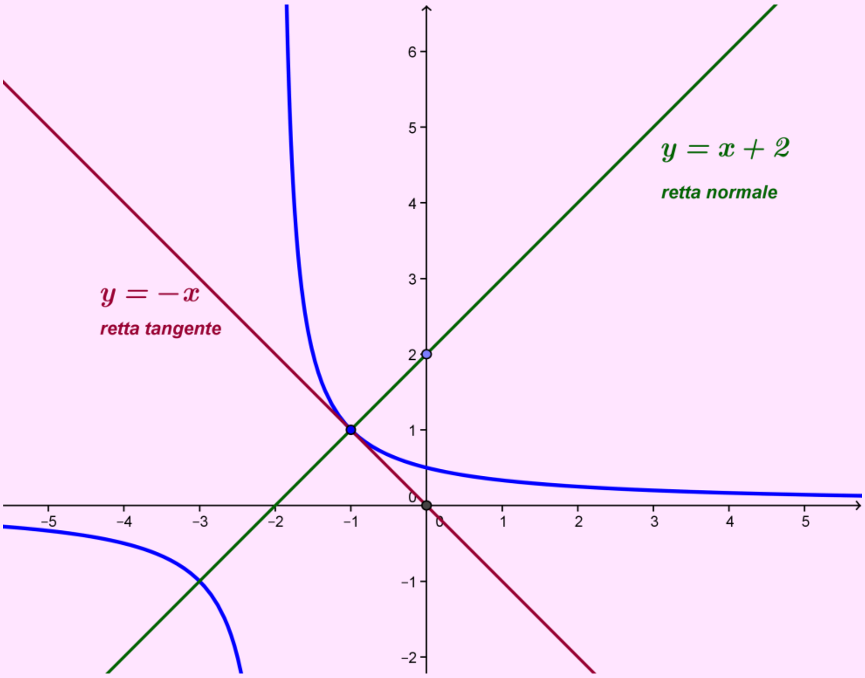
Quindi:

$$f'(-1) = -\frac{1}{(-1+2)^2} = -1$$

Possiamo trovare l'equazione della tangente: $y - 1 = -1(x+1) \Rightarrow y = -x$

- L'equazione della normale si trova facilmente essendo $-\frac{1}{f'(-1)} = 1 \Rightarrow$

$$y - 1 = 1(x+1) \Rightarrow y = x + 2$$



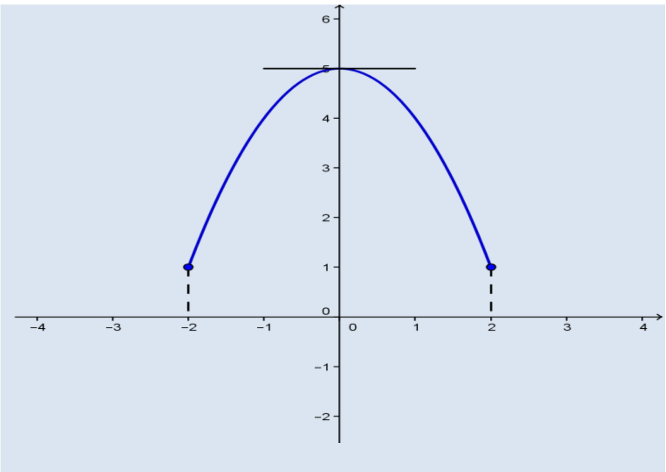
10. TEOREMA DI ROLLE

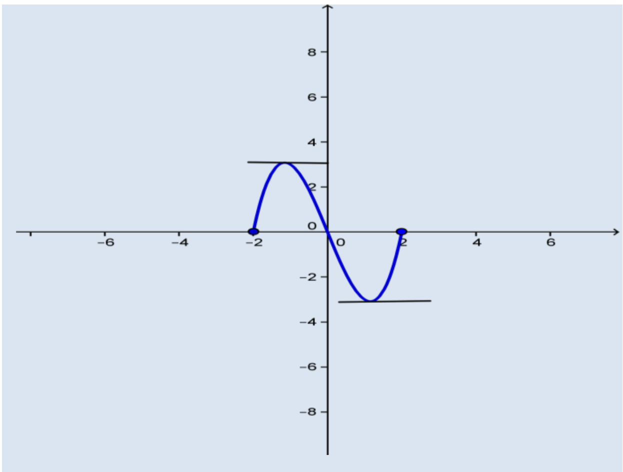
Teorema: Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è una continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, derivabile in un intervallo aperto e limitato (a,b) e negli estremi di tale intervallo assume lo stesso valore cioè $f(a)=f(b)$ allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0)$=0

Significato geometrico del teorema di Rolle: una funzione in cui sono verificate le tre condizioni di tale teorema avrà almeno un punto in cui la tangente alla funzione sarà parallela all'asse x; cioè ci sarà almeno un punto di massimo o di minimo.

OSSERVAZIONE

La derivabilità è richiesta solo nell'intervallo aperto (a,b)





ESEMPI

1. Consideriamo la funzione $f(x)=x^2+x$ e verifichiamo se nell'intervallo $[-1{,}0]$ è applicabile il teorema di Rolle, in caso affermativo determina i punti dell'intervallo in cui è applicabile.

   La funzione è continua in $[-1{,}0]$ perché lo è all'interno di tutto il suo dominio $D=(-\infty,+\infty)$.

   La derivata prima $f'(x)=2x-1$ è continua nel suo dominio

   $D=(-\infty,+\infty)$ quindi la funzione è derivabile nell'intervallo in $(-\infty,+\infty)$ e a maggior ragione lo sarà in $(-1{,}0)$.

   Verifichiamo se negli estremi dell'intervallo assume lo stesso valore:

$f(-1)=0$ mentre $f(0)=0$ quindi il teorema è applicabile.

Per trovare il punto o i punti in cui è verificato poniamo la derivata prima uguale a zero: $2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$

2. Verifichiamo se per la seguente funzione è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1{,}0]$.

$$f(x)=\begin{cases} x-5 & se \quad -1\le x<0 \\ 0 & se \quad x=0 \end{cases}$$

Verifichiamo l'ipotesi di continuità: calcoliamo $\lim_{x\to 0^-}(x-5)=-5$, poiché $f(0)=0$ la funzione non è continua in x=0 quindi il teorema non è applicabile.

3. Consideriamo la seguente funzione e verifichiamo se è valido il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1{,}0]$: $\quad f(x)=\begin{cases} x+1 & se \quad -1\le x<-\frac{1}{2} \\ -x & se \quad -\frac{1}{2}\le x\le 0 \end{cases}$

Verifichiamo l'ipotesi di continuità:

calcoliamo i limiti destro e sinistro nel $x=-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}(x+1)=\frac{1}{2}$ e

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+}-x=\frac{1}{2}$ quindi la funzione è continua nell'intervallo $[-1{,}0]$

Verifichiamo l'ipotesi di derivabilità:

calcoliamo la derivata prima di $f(x)$

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & se \quad -1\le x<-\frac{1}{2} \\ -1 & se \quad -\frac{1}{2}\le x\le 0 \end{cases}$$

quindi essendo il limite destro e il sinistro in $x=-\frac{1}{2}$ diversi la funzione non è derivabile, infatti $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}(1)=1$ e $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+}(-1)=-1$.

Il teorema non è quindi applicabile.

4. Verificiamo se per la seguente funzione è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1{,}0]$:

$$f(x)=x^2-x$$

La funzione è continua perché lo è all'interno del suo dominio $D=(-\infty,+\infty)$.

La derivata prima $f'(x) = 2x - 1$ è continua nel suo dominio $D = (-\infty, +\infty)$ quindi la funzione a maggior ragione è derivabile nell'intervallo $(-1,0)$.

Verifichiamo se negli estremi dell'intervallo assume lo stesso valore: $f(-1) = 2$ mentre $f(0) = 0$ quindi il teorema non è applicabile

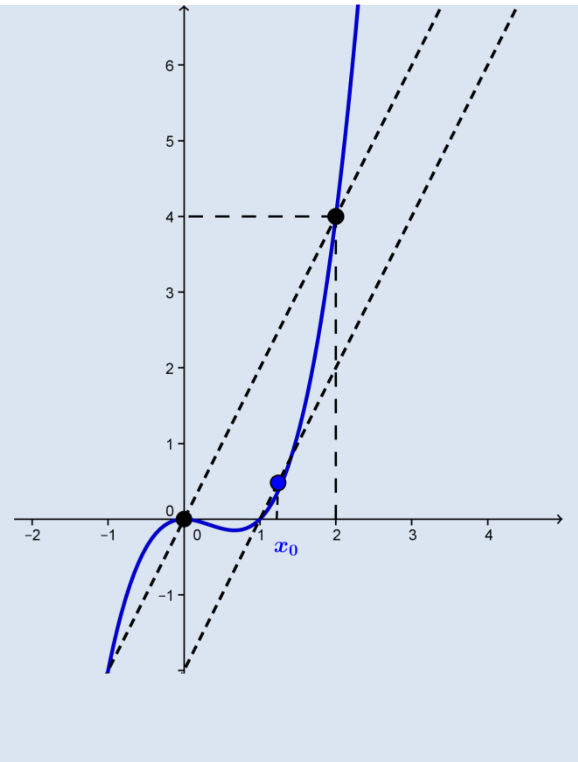
Verifichiamo l'ipotesi di continuità: calcoliamo $\lim_{x\to 0^-}(x-5) = -5$, poiché $f(0) = 0$ la funzione non è continua in x=0 quindi il teorema non è applicabile.

11. TEOREMA DI LAGRANGE

Teorema: Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è una continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, derivabile in un intervallo aperto e limitato (a, b) allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Significato geometrico del teorema di Lagrange: una funzione in cui sono verificate le condizioni di tale teorema avrà almeno un punto in cui la tangente alla funzione sarà parallela alla corda passante per i punti $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$; cioè il coefficiente angolare della retta che passa per i punti della funzione gli estremi dell'intervallo è uguale al coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in almeno un punto interno a tale intervallo.



OSSERVAZIONE

Come per il teorema di Rolle, la derivabilità è richiesta solo nell'intervallo aperto (a, b).

ESEMPI

1. Verifichiamo se per la seguente funzione è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,2]$:

$$f(x) = x^3 - x^2$$

La funzione è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ perché è una funzione polinomiale, in particolare, sarà continua in $[0,2]$ e derivabile in $(0,2)$. Possiamo quindi applicare il teorema di Lagrange, esisterà almeno un punto $x_0 \in (0,2)$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

Essendo

$$f'(x_0) = 3x^2 - 2x$$

Otterremo la seguente equazione:

$3x^2 - 2x = \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6}$

La soluzione negativa non è accettabile perché non appartiene all'intervallo $(0,2)$.

2. Verificiamo se per la seguente funzione è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1,1]$:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

Non è derivabile nel punto $x = 0$ perché c'è una di cuspide, quindi il teorema non è applicabile.

12. TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Teorema: Siano f e g due funzioni definite in un intorno V del punto x_0 (escluso al più x_0) e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \text{ oppure } \pm\infty$.

Se f e g sono derivabili nell'intorno V (escluso al più x_0), con $g'(x) \neq 0$ nell'intorno V ed inoltre esiste $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

OSSERVAZIONI

- Il teorema risulta utile per calcolare quei limiti che presentano forme di indeterminazione $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

L'utilizzo di questo teorema agevola il calcolo dei seguenti limiti:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} \qquad \forall a > 1\,,\ \alpha > 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^n{}_a x}{x^\alpha} \quad \forall a, n > 0\,, a \neq 1, \alpha > 0$

- Se non esiste $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non possiamo concludere che non esiste anche $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

ESEMPI

1. Applicando la regola di De L'Hôpital calcola il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

Sostituendo abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Applichiamo il teorema:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Applichiamo ancora il teorema:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$$

2. Applicando la regola di De L'Hôpital calcola il seguente limite

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2}$$

Sostituendo abbiamo:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \frac{0}{0}$$

Applichiamo il teorema:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to1} \frac{2x}{2x-1} = 2$$

13. DERIVABILITA' E CONTINUITA'

Teorema: se una funzione f è derivabile in un punto x_0 allora è continua in x_0.

OSSERVAZIONE

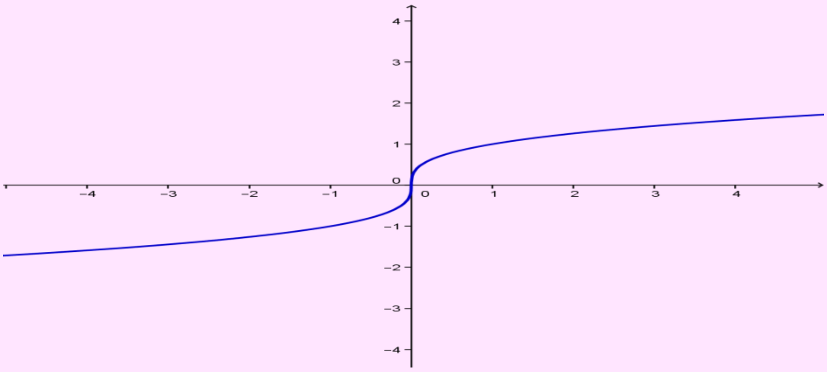
La derivabilità è solo una condizione sufficiente per la continuità. Esistono funzioni continue in un punto x_0 ma che non sono derivabili in questo punto.

Le seguenti funzioni sono tutte continue in $x_0 = 0$ ma non sono derivabili in questo punto.

ESEMPI

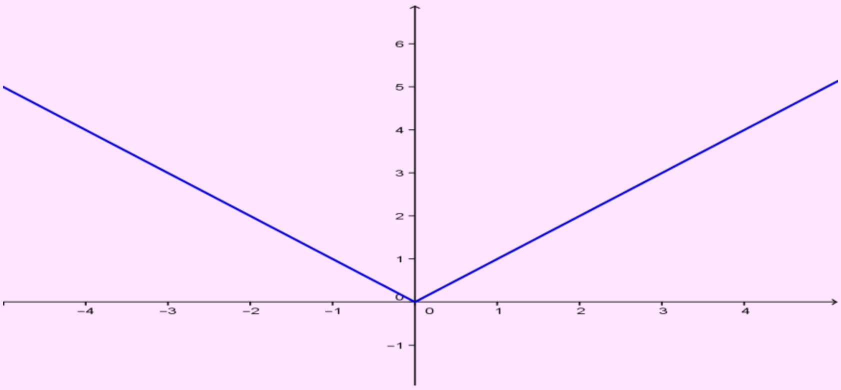
1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(punto di flesso a tangente verticale)



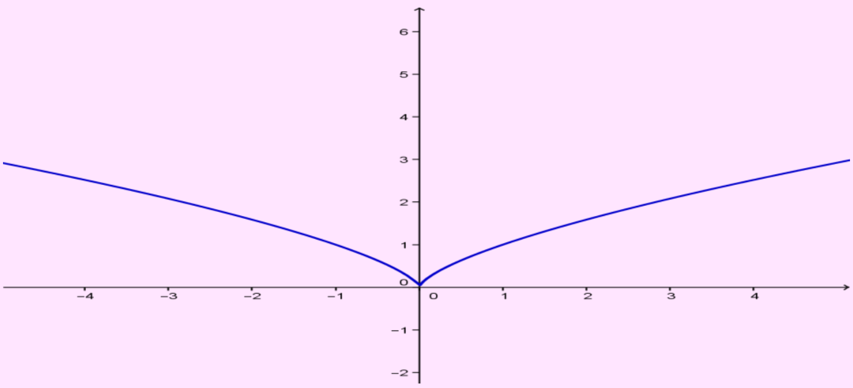
2. $f(x) = |x|$

(punto angoloso)



3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

(punto di cuspide)



Una funzione f è derivabile in un intervallo (a, b) se risulta derivabile in tutti i punti di (a, b).

In questo caso è definita una funzione che associa ad ogni punto di (a, b) il valore della derivata di f in quel punto:

$$x \rightarrow f'(x)$$

Tale funzione viene detta funzione derivata e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$\frac{df}{dx}(x), \qquad Df(x), \qquad f'(x)$$

Grafico di $f(x)$

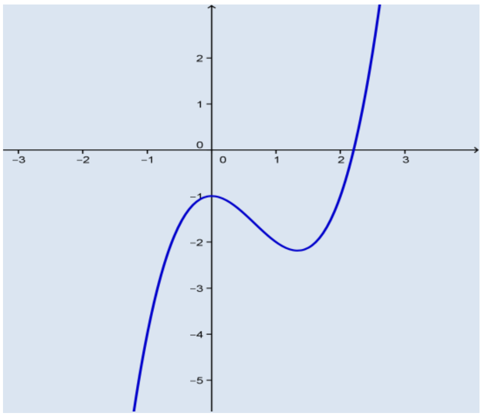
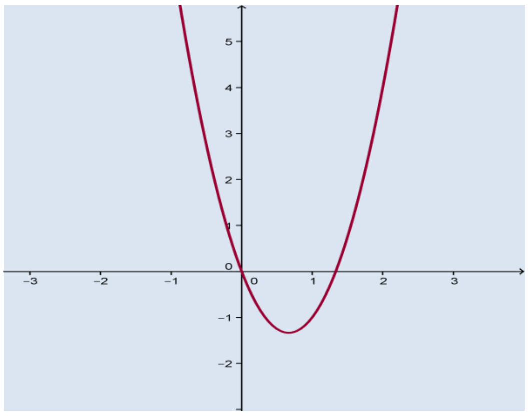


Grafico della derivata $f'(x)$ di $f(x)$



Teorema: sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo I, $x_0 \in I$ per stabilire se f è derivabile in x_0 dobbiamo calcolare il $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ se tale limite esiste finito allora possiamo concludere che la funzione è derivabile in x_0.

Consideriamo i seguenti esempi:

ESEMPI

1. Data la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ verifichiamo se è derivabile in $x_0 = 0$.

Calcoliamo la derivata prima $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Calcoliamo il $\lim_{x \to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty$ quindi la funzione non è derivabile in $x_0 = 0$.

2. Determinare per quale valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è derivabile in $x_0 = 0$: $f(x) = \begin{cases} \{\ln(k^2 x + 1) & se\ 0 \le x < 1 \\ e^{kx} - k^2 - 1 & se\ x < 0 \end{cases}$

Calcoliamo la derivata prima $f'(x) = \begin{cases} \frac{k^2}{k^2 x + 1} & se\ 0 \le x < 1 \\ ke^{kx} & se\ x < 0 \end{cases}$

Calcoliamo il limite destro e sinistro della derivata prima.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{k^2}{k^2x+1} = k^2$$

$$\lim_{x\to 0^-} ke^{kx} = k$$

Affinché f sia derivabile i due valori devono coincidere:

$$k^2 = k$$

Risolvendo l'equazione avremo $k^2 - k = 0 \;\Rightarrow\; k(k-1) = 0 \;\Rightarrow k = 0 \vee k = 1$

14. PUNTI DI MASSIMO, MINIMO RELATIVO E ASSOLUTO

Fino ad ora ci siamo occupati del puro calcolo delle derivate, in questo capitolo e nei successivi vedremo alcune importanti applicazioni delle derivate come ad esempio la ricerca dei massimi, dei minimi e dei punti di flesso, il calcolo dei limiti, lo studio di funzione ecc. Per questo dobbiamo introdurre alcune definizione e alcuni teoremi sulle funzioni derivabili.

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$.

Diciamo che x_0 è un punto di massimo relativo o locale per f se esiste un intorno V di x_0 tale che: $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in V$.

Il valore assunto dalla funzione in x_0, cioè l'immagine $M = f(x_0)$ di x_0, viene detto massimo relativo della funzione.

Diciamo che x_0 è un punto di minimo relativo o locale per f se esiste un intorno V di x_0 tale che: $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in V$.

Il valore assunto dalla funzione in x_0, cioè l'immagine $m = f(x_0)$ di x_0, viene detto minimo relativo della funzione.

OSSERVAZIONI

Queste definizioni descrivono il comportamento locale di una funzione, cioè il comportamento della funzione vicino ad un punto x_0.

Le definizioni di massimo e minimo assoluto o globale, già introdotte nel primo capitolo e che ricordiamo di seguito, riguardano il comportamento della funzione in tutto il suo dominio.

Diciamo che x_0 è un punto di massimo assoluto o globale per f se:

$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D$.

Il valore assunto dalla funzione in x_0, cioè l'immagine $M = f(x_0)$ di x_0, viene detto massimo assoluto della funzione.

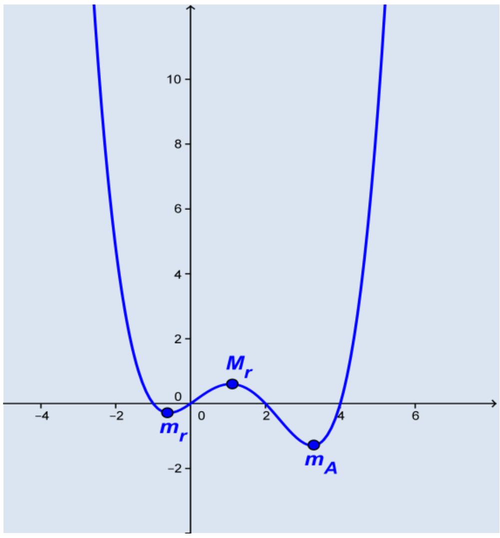
Diciamo che x_0 è un punto di minimo assoluto o globale per f se:

$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D$.

Il valore assunto dalla funzione in x_0, cioè l'immagine $m = f(x_0)$ di x_0, viene detto minimo assoluto della funzione.

OSSERVAZIONI

- Il massimo ed il minimo assoluto di una funzione, se esistono, sono unici, invece i punti di massimo e minimo relativi possono essere più di uno, come nel seguente grafico:



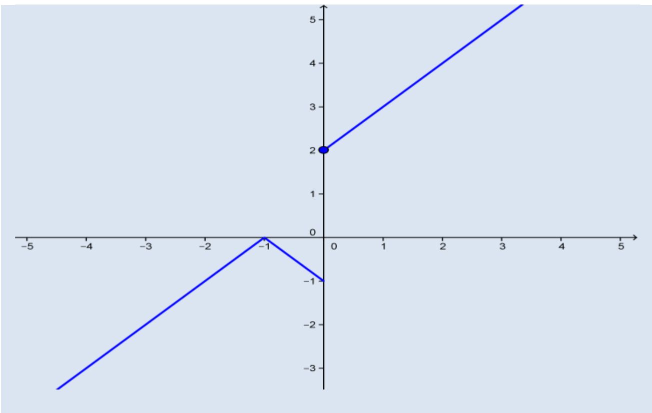
- Un estremo assoluto è anche un estremo relativo, ma non è sempre vero il viceversa, per esempio nella figura sopra

  m_r è un minimo relativo ma non assoluto

  m_A è un minimo assoluto e relativo

  M_r è un massimo relativo ma non assoluto

- Una funzione può avere un estremo relativo o assoluto anche in un punto di discontinuità o in un punto di continuità ma non derivabilità, vediamo ad esempio la funzione nel seguente grafico:



$x = 0$ è un punto di minimo relativo, ma anche un punto di discontinuità di prima specie.

$x = -1$ è un massimo relativo, ma non è derivabile perché c'è un punto angoloso.

15. PUNTI STAZIONARI E TEOREMA DI FERMAT

Teorema: Siano $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di massimo o minimo locale interno ad $[a, b]$, se f è derivabile in x_0 allora

$$f'(x_0) = 0.$$

I punti dove la derivata prima di una funzione è uguale a zero vengono detti punti stazionari.

OSSERVAZIONI

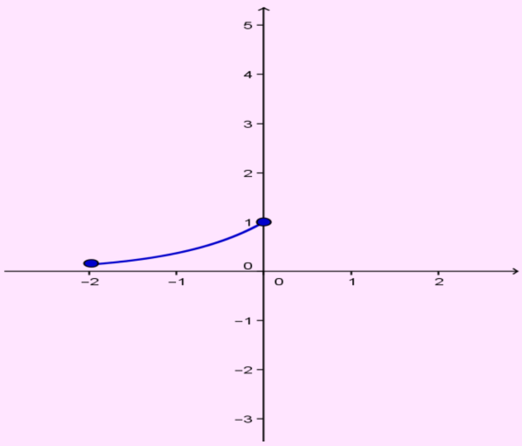
- In un punto di frontiera del campo di esistenza che risulta di massimo o di minimo locale non è detto che la derivata prima si annulli.

ESEMPIO

La funzione $y = e^x$ per $x \in [-2,0]$

La funzione in $x_0 = -2$ ha un punto di minimo locale, in $x_0 = 0$ ha un punto di massimo locale, ma in tali punti la derivata non si annulla infatti $y' = e^{-2} \neq 0$

$y' = e^0 = 1 \neq 0.$



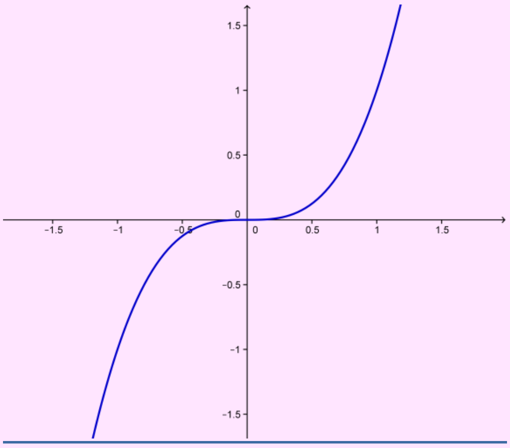
- Un punto stazionario non è necessariamente un punto di massimo o di minimo locale.
- Il teorema di Fermat ci dice dove cercare gli eventuali estremi relativi, ma non ci garantisce né che siano realmente estremi relativi, né ci da un criterio per stabilirlo.

ESEMPIO

La funzione $y = x^3$

La funzione in $x_0 = 0$ ha $y'(0) = 0$,

ma tale punto non è un punto né di massino né di minimo locale.



16. STUDIO DELLA MONOTONIA

Teorema: Data una funzione $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile nell'intervallo aperto (a, b).

Avremo che se:

- $f'(x) > 0\ \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f$ è crescente in (a, b)
- $f'(x) < 0\ \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f$ è decrescente in (a, b)

Questo teorema viene utilizzato per individuare gli intervalli di monotonia di una funzione derivabile, per questo è sufficiente calcolare la derivata prima e studiarne il segno risolvendo la disequazione $f'(x) > 0$.

OSSERVAZIONE

Queste proprietà valgono solo su intervalli, infatti se consideriamo la funzione $y = \frac{1}{x}$ che ha come dominio $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ essa avrà come derivata prima $y' = -\frac{1}{x^2}$ che risulta negativa $\forall x \in D$, ma la funzione non è decrescente nel dominio D.

ESEMPIO

Data la funzione $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}$, determiniamo gli intervalli di monotonia cioè gli intervalli in cui f è crescente e quelli in cui f è decrescente.

Calcoliamo la derivata della funzione: $f'(x) = x^3 - x^2$

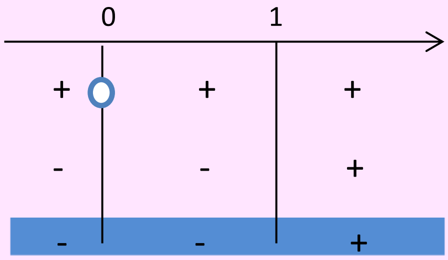
Studiamo il segno della derivata:

$f'(x) > 0$ quindi $\quad x^3 - x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x - 1) > 0$

studiamo il segno del prodotto:

$x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$x - 1 > 0 \;\; \Rightarrow \;\; x > 1$



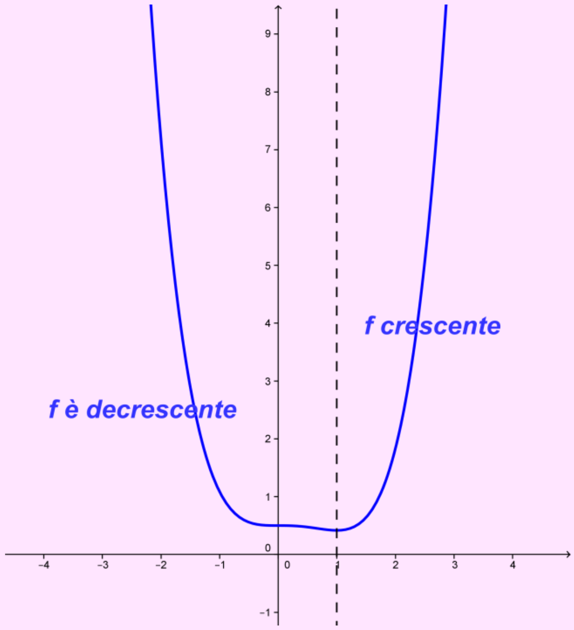
$f'(x) > 0 \qquad (1, +\infty)$

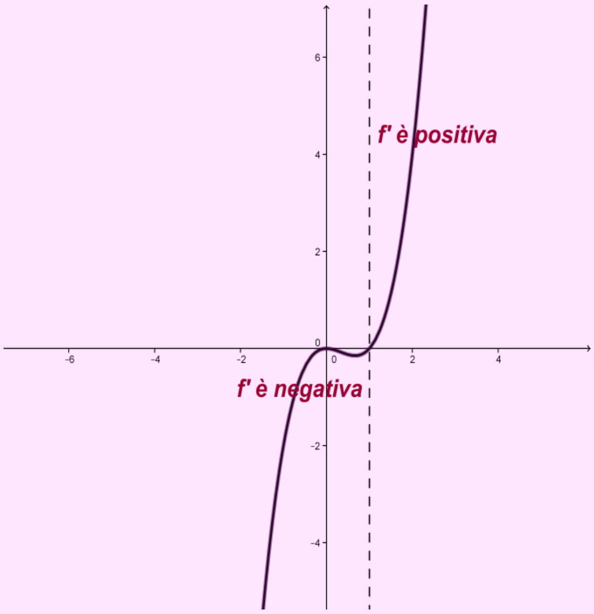
$f'(x) < 0 \qquad (-\infty, 0) \cup (0,1)$

Quindi dal teorema sulla monotonia deduciamo:

f è crescente nell'intervallo $(1, +\infty)$

f è decrescente in $(-\infty, 0) \cup (0,1)$





17. STUDIO DEI PUNTI STAZIONARI

Abbiamo definito stazionari quei punti dove la derivata prima di una funzione è uguale a zero.

Data una funzione $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile nell'intervallo aperto (a, b).

Un punto $x_0 \in (a, b)$ si definisce critico se è un punto stazionario oppure se è un punto in cui la funzione è continua ma non derivabile.

Punti critici possono essere sia punti di massimo o di minimo relativo oppure punti angolosi o di cuspide ecc…

Teorema: consideriamo una funzione continua in un intorno $V(x_0)$ e derivabile in $V(x_0)\setminus\{x_0\}$, se si verificano contemporaneamente le due condizioni

$$\begin{cases} \boldsymbol{f'(x) > 0 \quad se\ x \in V(x_0)\ e\ x < x_0} \\ \boldsymbol{f'(x) > 0 \quad se\ x \in V(x_0)\ e\ x > x_0} \end{cases}$$

Allora x_0 è un punto di massimo locale.

Teorema: consideriamo una funzione continua in un intorno $V(x_0)$ e derivabile in $V(x_0)\setminus\{x_0\}$, se si verificano contemporaneamente le due condizioni

$$\begin{cases} \boldsymbol{f'(x) < 0 \quad se\ x \in V(x_0)\ e\ x < x_0} \\ \boldsymbol{f'(x) > 0 \quad se\ x \in V(x_0)\ e\ x > x_0} \end{cases}$$

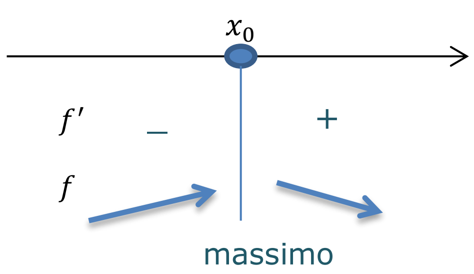
Allora x_0 è un punto di minimo locale.

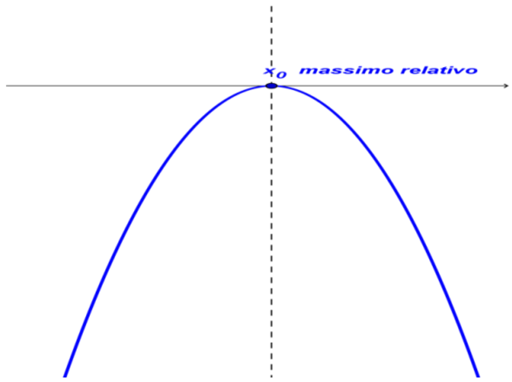
OSSERVAZIONI

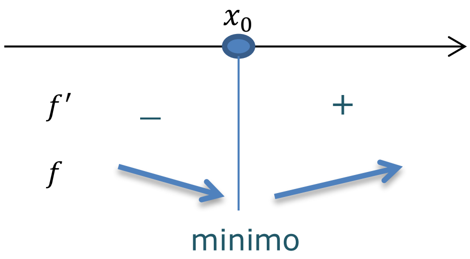
Questi teoremi si utilizzano per studiare la natura dei punti stazionari di una funzione, dopo aver studiato il segno della derivata prima si faranno le seguenti considerazioni:

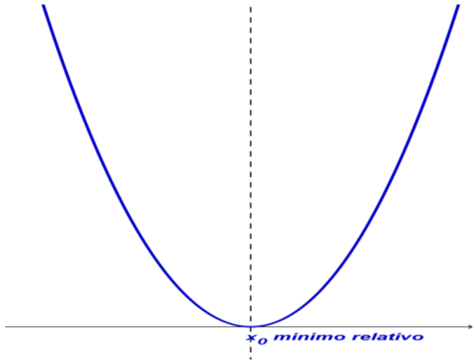
- se nell'intorno di un punto stazionario al derivata prima cambia segno cioè esiste un intorno destro o sinistro in cui è positiva e un intorno sinistro o destro in cui è negativa allora tramite i teoremi possiamo stabilire se è un punto di massimo o di minimo.
- Se la derivata prima non cambia segno in un intorno di un punto critico x_0, allora x_0 non sarà né un punto di massimo né di minimo relativo, ma un punto a tangente orizzontale, detto flesso a tangente orizzontale.

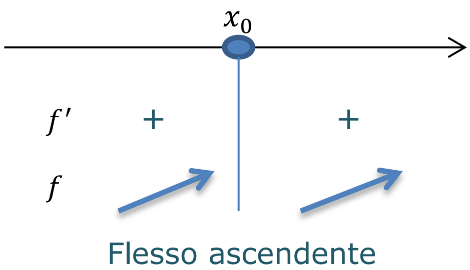
Riassumiamo i vari casi nella seguente **tabella**:

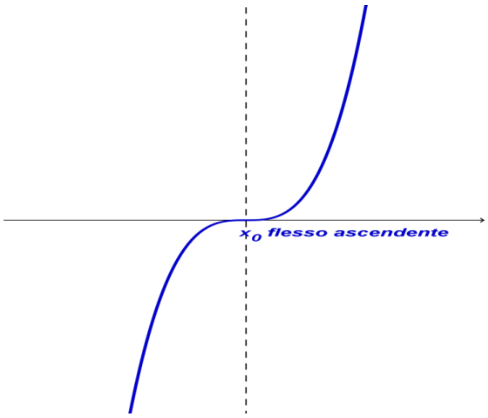


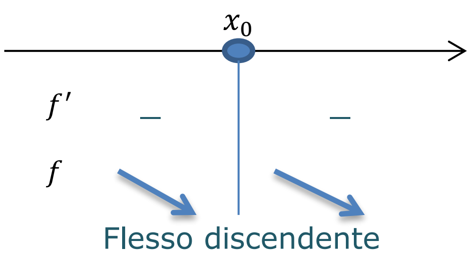


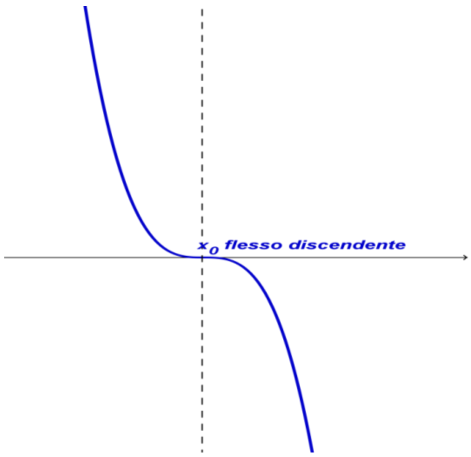












ESEMPIO

Determinare gli eventuali punti critici della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

La funzione ha come dominio $D = (-\infty, +\infty)$

È derivabile nell'intero dominio, quindi per il teorema di Fermat i suoi estremi relativi sono punti stazionari.

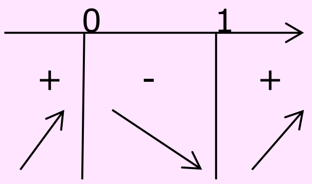
Calcoliamo la derivata prima e ricerchiamo i punti in cui si annulla:

$$f'(x) = x^2 - x$$

$x^2 - x = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x(x-1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = 0 \quad \vee \quad x = 1$ sono punti stazionari

Studiamo il segno della derivata prima per stabilire la natura di questi punti:

$x^2 - x > 0 \ \Rightarrow \ x < 0 \quad \vee \quad x > 1$



$x = 0$ punto di massimo

$x = 1$ punto di minimo

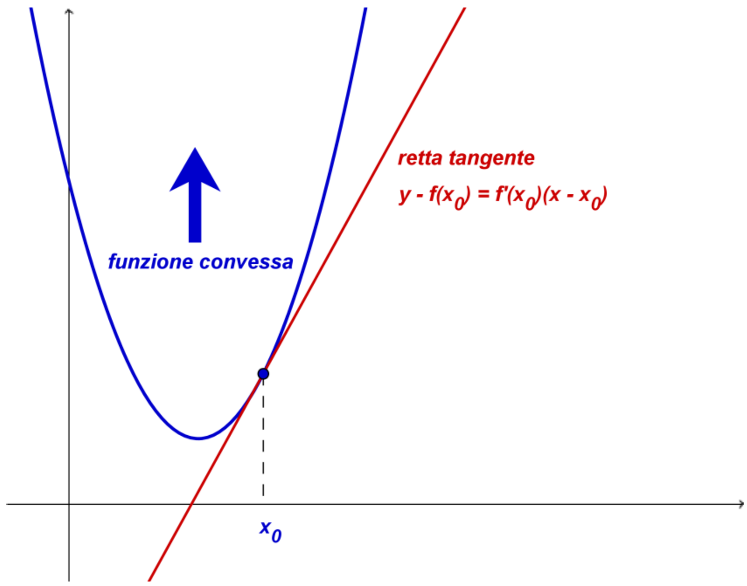
18. FUNZIONI CONCAVE O CONVESSE E PUNTI DI FLESSO

Consideriamo una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in un punto x_0 appartenente all'intervallo aperto (a,b).

Sia $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ la retta tangente al grafico della funzione nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

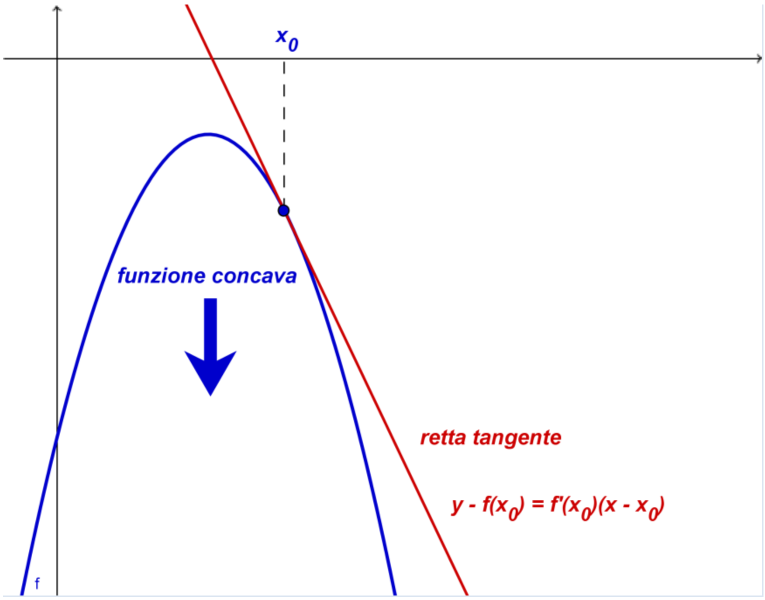
Si dice che la funzione f è convessa in x_0 (concavità verso l'alto) se esiste un intorno $V(x_0)$ dove $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \ \forall x \in V(x_0)$

Cioè il grafico di f si trova al di *sopra* della retta tangente.



Si dice che la funzione f è concava in x_0 (concavità verso il basso) se esiste un intorno $V(x_0)$ dove $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \ \forall x \in V(x_0)$

Cioè il grafico di f si trova al di *sotto* della retta tangente.



Teorema: sia f una funzione due volte derivabile in V. Tale f è:

1) Convessa in V se e solo se $f'' > 0, \ \forall x \in V$
2) Concava in V se e solo se $f'' < 0, \ \forall x \in V$

Consideriamo una funzione $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in un punto x_0 appartenente all'intervallo aperto (a, b). Sia $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ la retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$. Se esiste un intorno del punto x_0 per cui

$f(x) \le f(x_0)+f'(x_0)(x - x_0), \qquad \forall x \in V^-(x_0)$

$f(x) \le f(x_0)+f'(x_0)(x - x_0), \qquad \forall x \in V^+(x_0)$

si dice che la funzione f ammette in x_0 un punto di flesso ascendente. Il questo punto x_0 il grafico della funzione attraversa la retta tangente passando da sotto a sopra, la funzione risulta concava in $V^-(x_0)$ mentre risulta convessa in $V^+(x_0)$.

Analogamente: se esiste un intorno del punto x_0 per cui

$f(x) \ge f(x_0)+f'(x_0)(x - x_0), \qquad \forall x \in V^-(x_0)$

$f(x) \ge f(x_0)+f'(x_0)(x - x_0), \qquad \forall x \in V^+(x_0)$

si dice che la funzione f ammette in x_0 un punto di flesso discendente. Il questo punto x_0 il grafico della funzione attraversa la retta tangente passando da sopra a sotto, la funzione risulta convessa in $V^-(x_0)$ mentre risulta concava in $V^+(x_0)$.

Quindi i punti di flesso di una funzione sono quelli i cui il grafico della funzione cambia la concavità.

Si osserva che il punto di flesso è:

- Obliquo se $f'(x_0) \neq 0$, cioè la retta tangente in x_0 non è parallela agli assi.
- Orizzontale se $f'(x_0) = 0$, cioè la retta tangente è parallela all'asse x.
- I punti di flesso a tangente verticale sono punti in cui non esiste la derivata prima, ma sono punti dove il grafico della funzione attraversa la retta tangente parallela all'asse y.

OSSERVAZIONE

In un punto di flesso non si richiede che la funzione sia due volte derivabile.

Se però f risulta due volte derivabile in un punto di flesso x_0 allora necessariamente sarà: $f''(x_0) = 0$.

Invece in un punto dove si annulla la derivata seconda non è detto che sia un punto di flesso ad esempio per la funzione $f(x) = x^4$ in $x = 0$ si annulla la derivata seconda ma non è un punto di flesso.

ESEMPIO

Determina gli intervalli dove la seguente funzione è convessa o concava e gli eventuali punti di flesso:

$$y = x^3 - 3x^2$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = 3x^2 - 6x$$

Calcoliamo la derivata seconda:

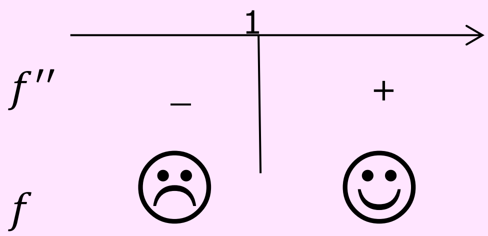
$$y'' = 6x - 6$$

Cerchiamo i punti in cui si annulla.

$6x - 6 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = 1$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$6x - 6 > 0 \;\; \Rightarrow \;\; x > 1$



f è convessa $(1, +\infty)$

f è concava $(-\infty, 1)$

$x = 1$ è un punto di flesso a tangente obliqua perché $f'(1) = 3$

19. SCHEMA PER LO STUDIO DI FUNZIONE

- Calcolo del domino
- Analisi di eventuali simmetrie e periodicità
- Intersezioni con gli assi cartesiani
- Studio del segno
- Limiti nei punti di frontiera del dominio:
  - ✓ ricerca degli eventuali asintoti
  - ✓ analisi punti di discontinuità
- Calcolo della derivata prima di f:
  - ✓ studio del dominio della derivata prima
  - ✓ ricerca di eventuali punti di non derivabilità
  - ✓ studio del segno della derivata prima
  - ✓ studio della monotonia
  - ✓ ricerca dei punti stazionari
- Calcolo della derivata seconda
  - ✓ studio del segno della derivata seconda
  - ✓ studio della concavità e della convessità
  - ✓ ricerca dei punti di flesso

ESEMPIO

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

✓ Calcoliamo il dominio: funzione razionale fratta quindi il denominatore deve essere $\neq 0$, cioè $x^2 + 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; x^2 \neq -1 \Rightarrow \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, quindi

$$D = (-\infty; +\infty)$$

✓ Simmetrie: la funzione è dispari infatti $f(x) = -f(-x)$

$$-f(-x) = -\frac{-x}{(-x)^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1} = f(x)$$

Quindi sarà simmetrica rispetto all'origine degli assi.

✓ Intersezione assi cartesiani: con asse x, poniamo $f(x) = 0$

$\frac{x}{x^2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad A(0,0)$

- ✓ Studio del segno:

  poniamo $f(x) > 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{x^2+1} > 0$

  N>0 $\;x > 0$

  D>0 $\;x^2 + 1 > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

		0	
N	--		+
D	+		+
$f(x)$	--		+

- ✓ Limiti agli estremi del dominio:

  $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \frac{-\infty}{+\infty}$ forma indeterminata dal confronto dei gradi otteniamo

  $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0^-$

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \frac{+\infty}{+\infty}$ forma indeterminata dal confronto dei gradi otteniamo

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0^+$

  Avremo un asintoto orizzontale in $y = 0$

- ✓ Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

  Il dominio della derivata è: $D = (-\infty; +\infty)$ quindi f è sempre derivabile

  Studiamo la derivata prima:

  $f'(x) = 0 \quad \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$ poiché la funzione è sempre derivabile ± 1 saranno gli eventuali punti di massimo e minimo.

  $f'(x) > 0 \quad \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \quad \Rightarrow$ N>0 se $\;-1 < x < 1$ D>0 $\;\forall x \in \mathbb{R}$

		-1		1	
$f'(x)$	- -		+		--
$f(x)$	↘		↗		↘
		m		M	

  $m = \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ punto di minimo

  $M = \left(1; \frac{1}{2}\right)$ punto di massimo

  I corrispondenti valori di y si trovano sostituendo il valore dell'ascissa del punto stazionario nella funzione $f(x)$ di partenza.

- ✓ Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{(-2x)\cdot(x^2+1)^2 - (1-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(x^2+1)[-2x(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$$

Studiamo la derivata seconda:

$f''(x) = 0 \quad \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x^2-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \lor \; x = \pm\sqrt{3}$

$f''(x) > 0 \quad \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} > 0 \quad \Rightarrow$

$N_1 > 0 \qquad x > 0$

$N_2 > 0 \qquad x < -\sqrt{3} \quad \lor \quad x > \sqrt{3}$

$D > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	--		--		+		+
	+		--		--		+
$f(x)$	☹		☺		☹		☺
		F		F		F	

I punti: $F_1(0;0)$, $F_2\left(-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $F_3\left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ sono i tre flessi della curva.