CAPITOLO 3

APPLICAZIONE DELL'ANALISI ALL'ECONOMIA

1. INTRODUZIONE

Le funzioni che si considerano in economia, quali la funzione della domanda, dell'offerta, dei costi di produzione, ecc., sono dei **modelli matematici** che cercano di interpretare la realtà e quindi possono rappresentare più o meno bene le relazioni fra le grandezze economiche. E' compito dell'economista valutare i risultati ottenuti con l'applicazione dei metodi matematici; se tali risultati non dovessero rappresentare in modo accettabile il fenomeno in studio, dovrà essere modificato il modello matematico. E' necessario inoltre tener presente che l'analisi infinitesimale considera funzioni reali di variabile reale, mentre in economia spesso le variabili sono espresse da numeri interi. Quindi verranno studiate le funzioni (per conoscerne l'andamento, i massimi ed i minimi, ecc.) considerando le variabili reali e, successivamente, saranno cercati i valori interi "più vicini" a quelli reali trovati.

2. FUNZIONE MARGINALE ED ELASTICITA'

Sia $y = f(x)$ una qualunque funzione economica (ad esempio: y può rappresentare il costo di produzione in funzione della quantità prodotta x, oppure il ricavo mensile di un'impresa in funzione della quantità venduta x, ecc.), si definisce:

- **funzione marginale nel discreto**: il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;
- **funzione marginale nel continuo**: la derivata $\frac{df}{dx}$.

Ad. esempio, se $y = f(x)$ rappresenta un ricavo e la funzione $f(x)$ è derivabile, $f'(x)$ è detto ***ricavo marginale***. La derivata misura la rapidità di aumento o diminuzione del ricavo rispetto alla quantità venduta.

In economia è interessante confrontare le variazioni di due grandezze di cui una è funzione dell'altra. La misura della variazione di una grandezza al variare della variabile indipendente è detta **elasticità** della funzione. Si definisce il **coefficiente di elasticità** il rapporto fra la variazione relativa di una funzione $\frac{\Delta f}{f}$ e la variazione relativa della variabile $\frac{\Delta x}{x}$:

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Tale rapporto si può anche scrivere come

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}}{\frac{f}{x}}$$

rapporto fra il valore marginale $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ ed il valore medio $\frac{f(x)}{x}$, ed è detto **elasticità dell'arco**. Nel continuo, nel caso in cui la funzione sia derivabile, si può calcolare

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}}{\frac{f}{x}} = \frac{x}{f} \cdot \frac{df}{dx}$$

che è detto **elasticità puntuale**. L'elasticità è positiva se la funzione $y = f(x)$ è crescente, negativa se è decrescente.

3. DOMANDA ED OFFERTA

LEGGE DELLA DOMANDA

Si definisce **domanda complessiva** di un prodotto la quantità che viene richiesta ad un dato prezzo dalla totalità degli acquirenti. La domanda è una funzione decrescente (o meglio non crescente) del prezzo p:

$$x = f(p)$$

Spesso è preferibile rappresentare la funzione inversa (sempre che esista) che esprime il prezzo in funzione della domanda e che è detta **funzione di vendita**:

$$p = f^{-1}(x)$$

ESEMPI

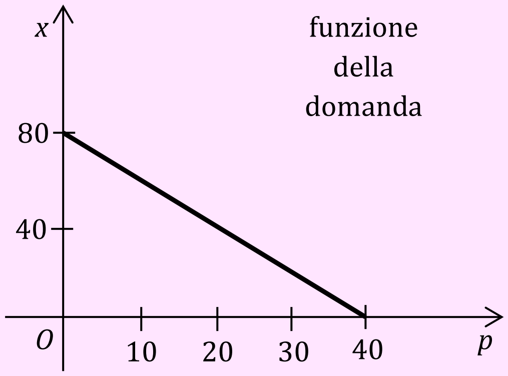
1. La domanda di un bene è espressa dalla legge:

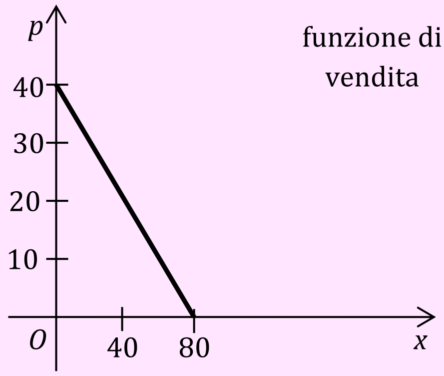
$$x = 80 - 2p$$

Rappresentare graficamente la funzione della domanda e la funzione di vendita.

La funzione della domanda si rappresenta con un segmento di retta, poiché le grandezze economiche p ed x non possono essere negative. La funzione di vendita, anch'essa rappresentata da un segmento di retta, è data da:

$$p = 40 - \frac{x}{2}$$





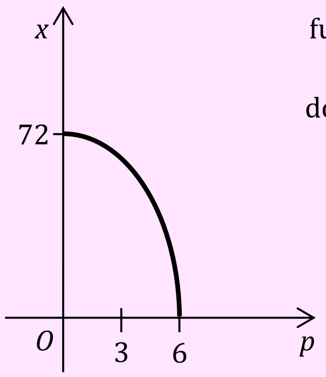
2. La domanda di un bene è espressa dalla legge:

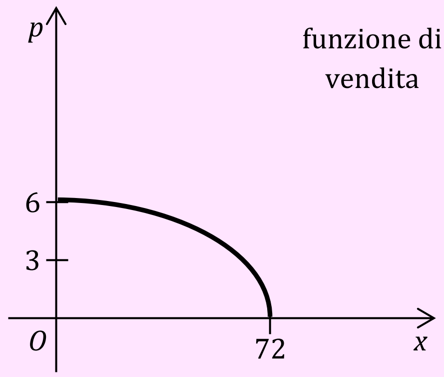
$$x = 72 - 2p^2 \qquad \text{con } 0 \le p \le 6$$

Rappresentare graficamente la funzione della domanda e la funzione di vendita.

La funzione della domanda si rappresenta nel primo quadrante con un arco di parabola di vertice $(0, 72)$, compreso tra il vertice ed il punto $(6, 0)$. La funzione di vendita, anch'essa rappresentata da un arco di parabola con asse coincidente con l'asse delle ascisse, è data da:

$$p = \sqrt{\frac{72 - x}{2}} \qquad \text{con } 0 \le x \le 72$$



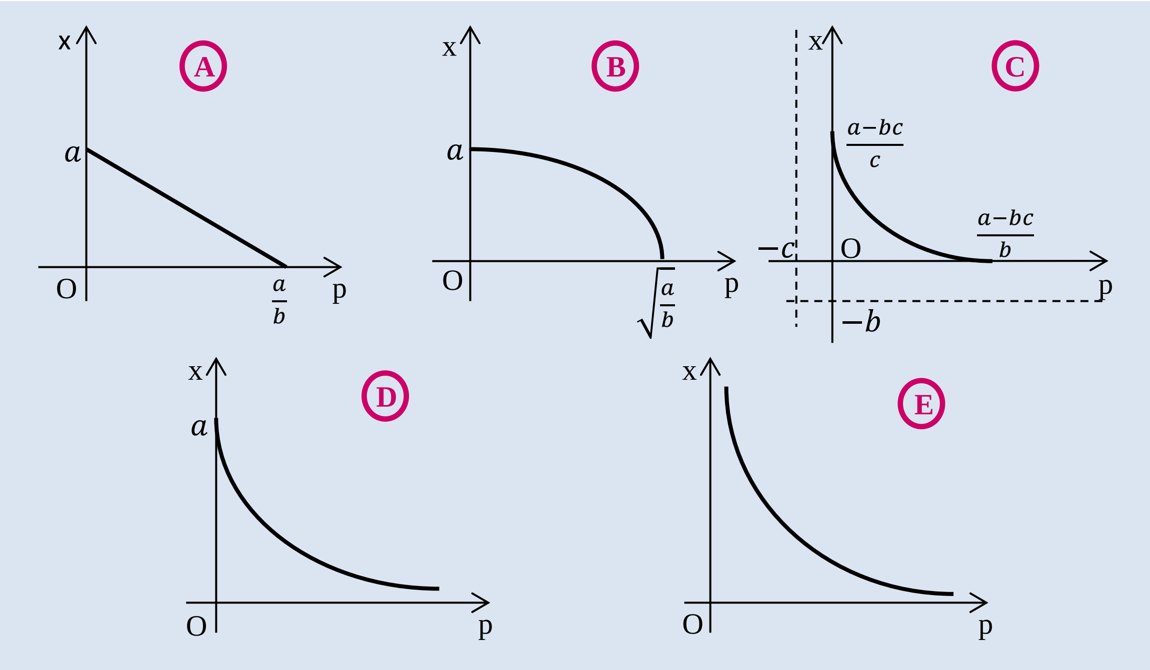


Le più comuni funzioni della domanda sono:

	funzione	Parametri	Grafico
A	$x = a - bp$	$a > 0, b > 0$	Segmento di retta
B	$x = a - bp^2$	$a > 0, b > 0$	Arco di parabola
C	$x = \dfrac{a}{p + c} - b$	$a > 0, b \ge 0, c \ge 0$	Arco di iperbole equilatera
D	$x = a \cdot e^{-bp}$	$a > 0, b > 0$	Arco di curva esponenziale

E	$x = \dfrac{a}{p^{\alpha}}$	$a > 0, \alpha > 0$	Curva decrescente di asintoti $x = 0$ e $p = 0$

Graficamente:



Per valutare la variazione della domanda rispetto al prezzo si calcola il **coefficiente di elasticità ε_d**, rapporto tra la variazione relativa della domanda $\frac{x_2-x_1}{x_1}$ e la variazione relativa del prezzo $\frac{p_2-p_1}{p_1}$, cioè:

$$\varepsilon_d = \frac{\frac{x_2 - x_1}{x_1}}{\frac{p_2 - p_1}{p_1}} = \frac{p_1}{x_1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{p_2 - p_1}$$

In generale l'**elasticità dell'arco** in un punto (p, x) è:

$$\varepsilon_d = \frac{p}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta p}$$

Nel caso in cui la variazione fra i prezzi p_1 e p_2 è notevole o non si conosce la legge della domanda, si assume come valore del rapporto $\frac{p}{x}$ il valore assunto nel punto medio dell'arco di estremi $(p_{1,}x_1)$ e $(p_{2,}x_2)$, di coordinate $\left(\frac{p_{1,}+p_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$; perciò l'elasticità dell'arco è:

$$\varepsilon_d = \frac{\frac{p_{1,} + p_2}{2}}{\frac{x_1 + x_2}{2}} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{p_{1,} + p_2}{x_1 + x_2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta p}$$

Se la funzione della domanda è continua e derivabile, si definisce **elasticità puntuale della domanda**

$$\varepsilon_d = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{p}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

Essendo la domanda una funzione decrescente, l'elasticità puntuale o dell'arco è negativa, per cui nelle applicazioni economiche si è soliti considerare il suo valore assoluto.

Se $|\varepsilon_d| < 1$, la domanda si dice **rigida** o **non elastica** (come nel caso di beni di prima necessità o medicinali), infatti la domanda reagisce lentamente alle variazioni di prezzo e non subisce variazioni sensibili anche in presenza di forti variazioni di prezzo; se $|\varepsilon_d| = 1$ la domanda si dice **anelastica** o **unitaria**, ossia la domanda varia nella stessa misura in cui varia il prezzo; se $|\varepsilon_d| > 1$, la domanda si dice **elastica** (come nel caso di spese voluttuarie), infatti una piccola variazione di prezzo può provocare una grande variazione della domanda.

ESEMPI

1. Al prezzo $p_1 = 20$ un bene economico ha una domanda $x_1 = 120$. Se il prezzo aumenta $p_2 = 24$ la domanda diminuisce a $x_2 = 90$. Calcolare l'elasticità dell'arco.

$$\varepsilon_d = \frac{\frac{x_2 - x_1}{x_1}}{\frac{p_2 - p_1}{p_1}} = \frac{\frac{90 - 120}{120}}{\frac{24 - 20}{20}} = -1.25$$

ossia all'aumento del prezzo dell'1%, la domanda diminuirebbe dell'1.25%

2. La domanda di un bene è espressa dalla funzione:

$$x = 3.000 - 15p \quad \text{con} \quad 0 \leq p \leq 200$$

Calcolare l'elasticità puntuale della domanda per i prezzi $p = 100$ e $p' = 150$.

Se $p = 100$ si ha $x = 1.500$ e l'elasticità puntuale risulta:

$$|\varepsilon_d| = \left| \frac{100}{1.500} \cdot (-15) \right| = 1$$

quindi al prezzo $p = 100$ la domanda è anelastica.

Se $p = 150$ si ha $x = 750$ e l'elasticità puntuale risulta:

$$|\varepsilon_d| = \left| \frac{150}{750} \cdot (-15) \right| = 3$$

quindi al prezzo $p = 100$ la domanda è elastica.

3. La domanda di un bene è espressa dalla funzione:

$$x = 160 - 0.1p^2 \quad \text{con} \quad 0 \leq p \leq 40$$

Calcolare l'elasticità puntuale della domanda per il prezzo $p = 10$.

Per un prezzo p qualsiasi l'elasticità puntuale risulta:

$$|\varepsilon_d| = \left|\frac{p}{160 - 0.1p^2} \cdot (-0.2p)\right| = \frac{0.2p^2}{160 - 0.1p^2}$$

Se $p = 10$ si ha $|\varepsilon_d| = 0.1\overline{3} < 1$; quindi la domanda è rigida.

LEGGE DELL'OFFERTA

Si definisce **offerta** la quantità di merce offerta sul mercato dai produttori. L'offerta è una funzione $x = g(p)$ non decrescente del prezzo, sempre nei limiti della capacità produttiva. La sua funzione inversa, se esiste, è detta **funzione di produzione** ed è sempre non decrescente.

Le più comuni funzioni dell'offerta sono:

	funzione	**Parametri**
A	$x = -a + bp$	$a \geq 0, b > 0$
B	$x = a\sqrt{p - b}$	$a > 0, b \geq 0$
C	$x = a + bp^{\alpha}$	$a \geq 0, b > 0, \alpha > 0$

Si osserva che nel modello lineare (A) il termine noto è negativo in quanto, se il prezzo è minore di un certo valore, l'offerta è nulla nel senso che al produttore non conviene produrre. Anche per l'offerta si calcola **l'elasticità** che risulta positiva:

$$\varepsilon_s = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

ESEMPIO

L'offerta di un bene è espressa dalla funzione:

$$x = 20\sqrt{p - 8} \qquad \text{con} \qquad p \geq 8$$

Determinarne l'elasticità.

L'elasticità puntuale dell'offerta in funzione del prezzo è:

$$\varepsilon_s = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{p}{20\sqrt{p - 8}} \cdot \frac{10}{\sqrt{p - 8}} = \frac{p}{2(p - 8)}$$

EQUILIBRIO TRA DOMANDA E OFFERTA

In economia si parla di **concorrenza perfetta** quando il mercato soddisfa alcune condizioni:

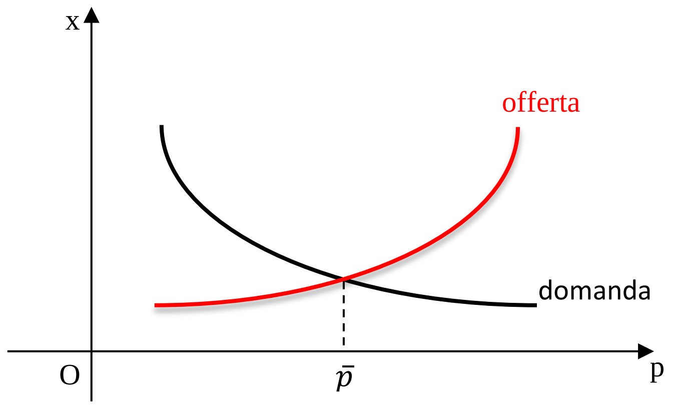
- omogeneità di prodotto;
- trasparenza del mercato (ogni operatore deve conoscere le condizioni di domanda, offerta e relativo prezzo);

- libertà di ingresso (ogni operatore deve essere libero di entrare o di uscire dal mercato secondo la propria convenienza);
- frazionamento della domanda e dell'offerta (devono essere presenti sul mercato molti produttori e molti consumatori in modo che nessun singolo operatore possa influire direttamente sul prezzo del bene).

Un problema economico molto importante è la determinazione del prezzo di equilibrio fra domanda e offerta in un mercato di libera concorrenza, matematicamente:

$$\begin{cases} x_d = f(p) & \text{funzione della domanda} \\ x_s = g(p) & \text{funzione dell'offerta} \\ x_d = x_s & \text{condizione di equilibrio} \end{cases}$$

con x_d quantità di merce richiesta dai consumatori e x_s quantità di merce offerta dai produttori. Dalla condizione di equilibrio si ricava il **prezzo di equilibrio $\bar{p}$**, prezzo che rende la quantità richiesta uguale a quella offerta. Infatti se il prezzo è minore di $\bar{p}$, la domanda è maggiore dell'offerta ed il prezzo tende ad aumentare (come la benzina quando i paesi produttori diminuiscono il numero giornaliero di barili estratti); se il prezzo è maggiore di $\bar{p}$ l'offerta è maggiore della domanda e quindi i produttori diminuiscono il prezzo (come nelle annate in cui è molto alta la produzione di vino). Graficamente:



ESEMPI

1. La domanda e l'offerta di un bene sono espresse dalle funzioni:

$$x_d = 250 - 0.1p^2 \qquad\qquad x_s = -20 + 6p$$

Calcolare il punto di equilibrio.

Il modello dell'equilibrio è:

$$\begin{cases} x_d = 250 - 0.1p^2 \\ x_s = -20 + 6p \\ x_d = x_s \end{cases}$$

La condizione di equilibrio è:

$$250 - 0.1p^2 = -20 + 6p \quad \Rightarrow \quad 0.1p^2 + 6p - 270 = 0$$

La soluzione positiva (quella negativa si esclude poiché non ha significato economico), che corrisponde al prezzo di equilibrio, è $p = 30$, cui corrisponde la quantità domandata ed offerta di $x = 160$.

2. La domanda e l'offerta di un bene sono espresse dalle funzioni:

$$x_d = 200 - 10p \qquad\qquad x_s = -60 + 42p$$

Calcolare il prezzo di equilibrio in un mercato di concorrenza perfetta. Calcolare inoltre l'elasticità della domanda e dell'offerta nel punto di equilibrio. Se dopo un certo tempo, per lo stesso bene, si hanno nuove leggi della domanda e dell'offerta, traslate rispetto alle precedenti e date da:

$$x_d = 300 - 10p \qquad\qquad x_s = -740 + 42p$$

quali sono il nuovo prezzo di equilibrio e la quantità di bene?

Il modello dell'equilibrio è:

$$\begin{cases} x_d = 200 - 10p \\ x_s = -60 + 42p \\ x_d = x_s \end{cases}$$

La condizione di equilibrio è:

$$200 - 10p = -60 + 42p \quad \Rightarrow \quad p = 5$$

Sostituendo si ricava: $x = 150$.

Le elasticità nel punto di equilibrio sono:

$$|\varepsilon_d| = \left|\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}\right| = \left|\frac{5}{150} \cdot (-10)\right| = \frac{1}{3} \qquad \varepsilon_s = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{5}{150} \cdot (42) = \frac{7}{5}$$

Quindi la domanda nel punto di equilibrio è rigida e l'offerta è elastica.

Con le nuove leggi, il nuovo modello matematico dell'equilibrio è:

$$\begin{cases} x_d = 300 - 10p \\ x_s = -740 + 42p \\ x_d = x_s \end{cases}$$

La condizione di equilibrio è:

$$300 - 10p = -740 + 42p \quad \Rightarrow \quad p = 20$$

Sostituendo si ricava: $x = 100$.

3. La domanda e l'offerta di un bene sono espresse dalle funzioni:

$$x_d = \frac{800}{p} \qquad\qquad x_s = -100 + 3p$$

Calcolare il prezzo di equilibrio in un mercato di concorrenza perfetta. Ripetere il calcolo del prezzo di equilibrio nell'ipotesi che la domanda sia variata secondo la legge:

$$x_d = \frac{1.575}{p}$$

mentre la legge dell'offerta rimanga invariata.

Il modello dell'equilibrio è:

$$\begin{cases} x_d = \dfrac{800}{p} \\ x_s = -100 + 3p \\ x_d = x_s \end{cases}$$

La condizione di equilibrio è:

$$\frac{800}{p} = -100 + 3p \quad \Rightarrow \quad 3p^2 - 100p - 800 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 40$$

La soluzione negativa non ha significato economico. Sostituendo si ricava: $x = 20$. Il punto di equilibrio sarà quindi $(40, 20)$

Con le nuove leggi, il nuovo modello matematico dell'equilibrio è:

$$\begin{cases} x_d = \dfrac{1.575}{p} \\ x_s = -100 + 3p \\ x_d = x_s \end{cases}$$

La condizione di equilibrio è:

$$\frac{1.575}{p} = -100 + 3p \quad \Rightarrow \quad 3p^2 - 100p - 1.575 = 0 \quad \Rightarrow p = 45$$

Sostituendo si ricava: $x = 35$.

Quindi il nuovo punto di equilibrio sarà $(45, 35)$.

4. COSTI DI PRODUZIONE

Nella produzione di un bene, un'impresa sostiene vari tipi di spese che normalmente si dividono in **costi fissi** cioè indipendenti dalla quantità prodotta (come l'affitto dei locali, le spese di amministrazione, l'ammortamento degli impianti, gli stipendi, le assicurazioni, la pubblicità, ecc.), **costi variabili in modo proporzionale** (ad esempio per materie prime,) e **costi variabili in modo non proporzionale** (energia elettrica impiegata nella produzione, spese di magazzinaggio, straordinari, ecc.). Il **costo totale**, che è uguale alla somma dei vari costi, è una funzione della quantità x di merce prodotta, ossia risulta:

$$y = C(x) \qquad \text{con} \quad x \geq 0$$

E' una funzione crescente in cui $C(0)$ rappresenta l'importo dei costi fissi.

Le più comuni funzioni di costo sono:

	funzione	Parametri	Grafico
A	$y = ax + b$	$a, b > 0$	Funzione lineare, rappresentata da una semiretta
B	$y = ax^2 + bx + c$	$a > 0, b, c \geq 0$	Funzione di secondo grado, rappresentata da una parabola.
	$y = ax^2 + bx + c$	$a < 0, b, c > 0$	Funzione di secondo grado, rappresentata da un arco crescente di parabola.
C	$y = ax^3 - bx^2 + cx + d$	$a > 0, b, c, d \geq 0$	Funzione di terzo grado sempre crescente
D	$y = ae^{bx}$	$a, b > 0$	Funzione esponenziale crescente

Per l'analisi dei costi di produzione si definiscono altre due funzioni: il costo medio ed il costo marginale.

Si definisce **costo medio** o **unitario** il rapporto fra il costo totale per produrre la quantità x e la quantità x prodotta:

$$c_u: \quad y = \frac{C(x)}{x} \qquad \text{con} \quad x > 0$$

Caso particolare: se la funzione del costo totale è di secondo grado $C(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c > 0$, la funzione del costo unitario è

$$c_u: \quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{x} = ax + b + \frac{c}{x} \qquad \text{con } x > 0$$

che ha per grafico un'iperbole non equilatera con asintoti $x = 0$ e $y = ax + b$ ed è detta funzione somma. Il costo medio è la somma fra il costo variabile medio $ax + b$ che è crescente ed il costo fisso medio $\frac{c}{x}$, che è decrescente. Di conseguenza il costo medio è decrescente fino ad un certo valore minimo, poi è crescente. Il valore di minimo costo unitario è detto dagli economisti **punto di fuga**, poiché se il prezzo di vendita fosse inferiore a quel valore, l'impresa sarebbe in perdita e dovrebbe ritirarsi dal mercato.

ESEMPI

1. Per la produzione di un bene un'impresa valuta costi fissi mensili $C_f = 6.000$ e costi variabili dati dalla funzione: $C_v = x^3 - 30x^2 + 500x$ con x quantità prodotta. Rappresentare graficamente la funzione del costo totale.

La funzione del costo totale è data da:

$$C(x):\ y = x^3 - 30x^2 + 500x + 6.000$$

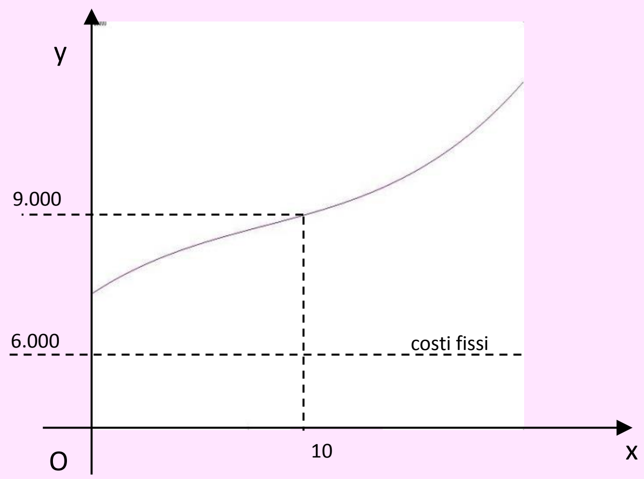
La funzione è una cubica. La derivata prima:

$$y' = 3x^2 - 60x + 500$$

risulta positiva per ogni valore di x. La derivata seconda:

$$y'' = 6x - 60$$

Si annulla per $x = 10$ a cui corrisponde: $C(10) = 9.000$. Si ricava che la curva ha un flesso per $x = 10$ essendo $C'' < 0$ per $x < 10$ e $C'' > 0$ per $x > 10$.



Tale curva è detta dagli economisti "**modello a S rovesciata**".

2. Un'impresa sostiene mensilmente un costo fisso mensile di € 8.000, un costo di € 12 per ogni unità prodotta ed una spesa per la manutenzione degli impianti pari al 5% del quadrato del numero delle unità prodotte. Calcolare la funzione del costo totale, del costo unitario ed il punto di fuga.

Sia x il numero delle unità prodotte mensilmente. Il costo totale è:

$$C(x) = 8.000 + 12x + 0.05x^2$$

Il costo unitario è:

$$c_u:\quad y = \frac{8.000 + 12x + 0.05x^2}{x} = \frac{8.000}{x} + 12 + 0.05x$$

La sua derivata prima è:

$$y' = -\frac{8.000}{x^2} + 0.05$$

Dallo studio della derivata prima si ricava che la funzione ha un massimo per $x = -400$, senza significato economico, ed un minimo per $x = 400$ al quale corrisponde un costo unitario di € 52. In conclusione il punto di fuga di € 52 si ha per una produzione mensile di 400 unità.

Si definisce **costo marginale** il costo sostenuto per ottenere una unità addizionale di prodotto, dato dal rapporto incrementale fra l'incremento del costo e l'incremento della quantità prodotta:

$$c_m: \quad y = \frac{\Delta C(x)}{\Delta x}$$

Nel caso in cui la funzione costo totale sia derivabile, il costo marginale è la derivata prima della funzione costo totale rispetto alla quantità prodotta:

$$c_m: \quad y = \frac{dC(x)}{dx}$$

Le curve del costo marginale e del costo medio si intersecano nei punti stazionari del costo unitario. Il costo medio è decrescente se il costo marginale è inferiore al costo medio, è invece crescente se il costo marginale è superiore al costo medio.

5. RICAVI E PROFITTI

Si definisce **ricavo totale** il prodotto della quantità venduta x per il prezzo di vendita p. Il **ricavo medio** è il rapporto tra il ricavo totale e la quantità di bene venduta. Il **ricavo marginale**, nel caso in cui la funzione ricavo sia derivabile, è dato dalla derivata della funzione ricavo totale rispetto ad x.

MERCATO DI CONCORRENZA PERFETTA

Il prezzo di vendita p è costante (prezzo di equilibrio tra domanda ed offerta), quindi il ricavo totale è:

$$R(x) = px$$

Il ricavo medio è:

$$r_u: \quad y = \frac{R(x)}{x} = p$$

Il ricavo marginale è:

$$r_m: \quad y = \frac{dR(x)}{dx} = p$$

MERCATO MONOPOLISTICO

Il prezzo si ricava dalla funzione di vendita, inversa della funzione della domanda, e risulta funzione della domanda, quindi il ricavo è:

$$R(x) = p(x) \cdot x$$

Il ricavo medio è:

$$r_u: \quad y = \frac{R(x)}{x} = p(x)$$

Il ricavo marginale è:

$$r_m: \quad y = \frac{dR(x)}{dx}$$

ESEMPI

1. In un mercato di concorrenza perfetta le leggi della domanda e dell'offerta sono date da:

$$x_d = 60 - 3p \qquad\qquad x_s = -30 + 4.5p$$

Determinare la funzione del ricavo totale, del ricavo medio e del ricavo marginale.

Dal modello dell'equilibrio si ricava il prezzo di equilibrio:

$$60 - 3p = -30 + 4.5p \qquad \Rightarrow \qquad p = 12$$

Ricavo totale: $R(x) = 12x$

Ricavo medio: r_u: $y = 12$

Ricavo marginale: r_m: $y = 12$

2. In un mercato monopolistico la domanda di un bene è data da:

$$x = 60 - 0.5p$$

Calcolare il ricavo totale, il ricavo unitario, il ricavo marginale e determinare per quale quantità il ricavo è massimo.

Dalla legge della domanda:

$$p(x) = 120 - 2x$$

Ricavo totale: $R(x) = (120 - 2x)x = 120x - 2x^2$

Ricavo unitario: r_u: $y = 120 - 2x$

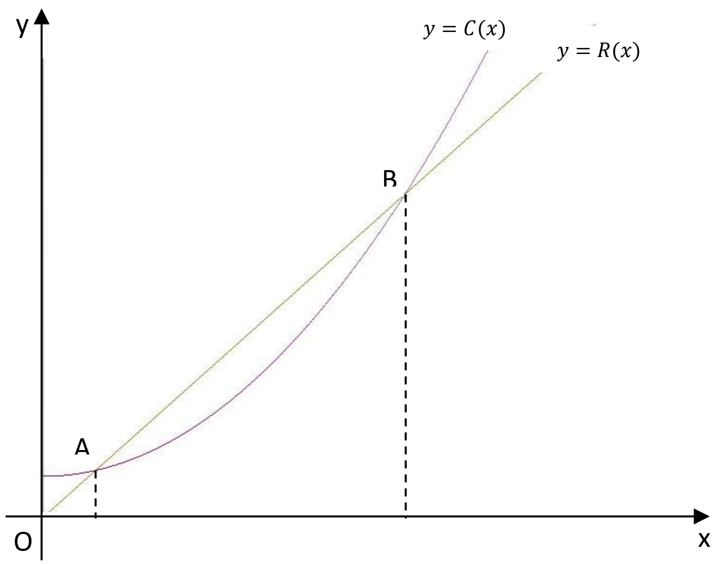
Ricavo marginale: r_m: $y = 120 - 4x$

La funzione ricavo totale è di secondo grado perciò è rappresentata da una parabola con concavità verso il basso e quindi il massimo sarà nel vertice della parabola di coordinate $(30, 1.800)$. Il ricavo è massimo per 30 unità di prodotto.

Si definisce **utile netto**, **profitto** o **guadagno** la differenza tra il ricavo totale ed il costo totale:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

In economia si utilizza il cosiddetto **diagramma di redditività** per confrontare ricavi ed utili. Nel caso di mercato di concorrenza perfetta si ha il seguente grafico:



Si ha un utile per i valori di x per i quali il costo $C(x)$ è inferiore al ricavo $R(x)$ e l'utile risulta positivo (zona compresa tra A e B), mentre per i valori in cui il costo supera il ricavo si è in perdita. I punti A e B in cui costi e ricavi sono uguali sono detti **break-even point** o **punti di equilibrio economico**.

Osservazione: in un mercato di concorrenza perfetta all'impresa conviene espandere la produzione finché il costo marginale sia uguale al ricavo marginale. L'utile è non negativo quando il costo medio non supera il prezzo, altrimenti l'impresa è in perdita.

ESEMPI

1. Data la funzione del costo totale mensile di un bene:

$$C(x) = 6.000 + 30x + 0.01x^2$$

sapendo che il prezzo costante di vendita è di € 70, calcolare per quale valore l'utile è massimo e per quali valori non si è in perdita.

L'utile è dato da $P(x) = R(x) - C(x)$, quindi:

$$y = 70x - (6.000 + 30x + 0.01x^2) \qquad \Rightarrow \qquad y = -0.01x^2 + 40x - 6.000$$

Il grafico è una parabola con il massimo nel vertice di coordinate $(2.000; 34.000)$. Quindi il massimo utile di € 34.000 si ha producendo e vendendo 2.000 unità del bene. I limiti di produzione si ottengono ponendo l'utile maggiore o uguale a zero:

$$-0.01x^2 + 40x - 6.000 \geq 0$$

da cui si ricava $156.09 \leq x \leq 3.843,91$. Ma poiché x rappresenta le unità prodotte di un bene, deve essere un numero intero, quindi l'azienda non è in perdita se $157 \leq x \leq 3.843$.

2. Un'impresa sostiene per la produzione un costo complessivo dato da:

$$C(x) = x^3 - 50x^2 + 1.500x + 9.000$$

La funzione della domanda è data da:

$$x = 800 - 0.2p$$

Calcolare la quantità che consente il minimo costo medio di produzione ed il relativo costo. Inoltre determinare la quantità che consente il massimo utile, il relativo costo medio di produzione ed il relativo prezzo di vendita.

Il costo medio è dato da:

$$y = \frac{x^3 - 50x^2 + 1.500x + 9.000}{x}$$

Derivando rispetto ad x si ottiene:

$$y' = \frac{2x^3 - 50x^2 - 9.000}{x^2}$$

Ponendo $y' = 0$ si ha: $x^3 - 25x^2 - 4.500 = 0$ che ha come unica soluzione reale $x = 30$; sostituendo $y = 1.200$. Quindi producendo 30 unità del bene, il costo medio minimo di produzione è di € 1.200.

Dalla funzione della domanda si ricava la funzione di vendita:

$$p = 4.000 - 5x$$

L'utile è dato dalla funzione:

$$P(x) = (4.000 - 5x)x - (x^3 - 50x^2 + 1.500x + 9.000) =$$
$$= -x^3 + 45x^2 + 2.500x - 9.000$$

Per trovare il massimo utile si deriva tale funzione:

$$P'(x) = -3x^2 + 90x + 2.500$$

Risolvendo $P'(x) \geq 0$ si trova un minimo negativo e quindi privo di significato economico ed un massimo per $x = 47.53$. Come visto già in precedenza, tale valore rappresenta il numero di unità da produrre e <u>deve</u> essere intero; quindi bisogna scegliere tra $x = 47$ e $x = 48$. Si calcola l'utile per tali valori e si trova rispettivamente $P(47) = 104.082$ e $P(48) = 104.088$. Se ne deduce che l'impresa realizza il massimo profitto di € 104.088 con una produzione di 48 unità ad un costo medio di € 1.591,50, con un prezzo di vendita di € 3.760.