CAPITOLO 1

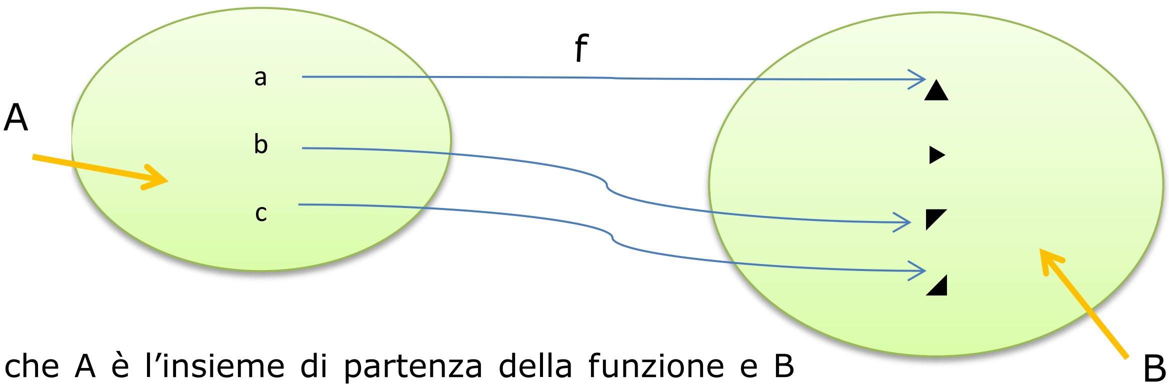
LE FUNZIONI

1. INTRODUZIONE

Importanti intuizioni del concetto di funzione lineare si riscontrano su alcune tavolette mesopotamiche e nell'opera di Claudio Tolomeo (II sec. d.C.), ma in particolar modo, anche se in una versione non esplicita, c'è un'idea di funzione negli ELEMENTI di Euclide nella Definizione V del Libro V (..“ ordinatamente … insieme..”) *“Si dice che le grandezze sono nello stesso rapporto, la prima rispetto alla seconda e la terza rispetto alla quarta, se equi multipli della prima e della terza rispetto agli equi multipli della seconda e della quarta, sono ordinatamente, o insieme maggiori, o insieme eguali, o insieme minori”*. Passerà ancora molto tempo fino a quando si comprenderà che le funzioni potranno essere condotte con uno studio matematico a se stante (XVII secolo). Il concetto di funzione è uno dei più importanti della matematica, perché da quando è stato introdotto ha rivoluzionato la disciplina stessa. La sua formalizzazione è avvenuta in tempi relativamente recenti, ma i primi studi risalgono al 1500.

2. PRIME DEFINIZIONI

Dati due insiemi non vuoti A e B, si definisce funzione (o corrispondenza univoca) una legge che fa associare <u>ad ogni elemento</u> $x \in A$ *<u>un unico</u>* elemento $y \in B$.



Si dice che A è l'insieme di partenza della funzione e B l'insieme di arrivo. Quando gli elementi degli insiemi A e B sono numeri le funzioni vengono chiamate funzioni numeriche, se A e B sono sottoinsiemi di numeri reali si parla di funzione reale di variabile reale; x è detta *variabile indipendente* y è detta *variabile dipendente.*

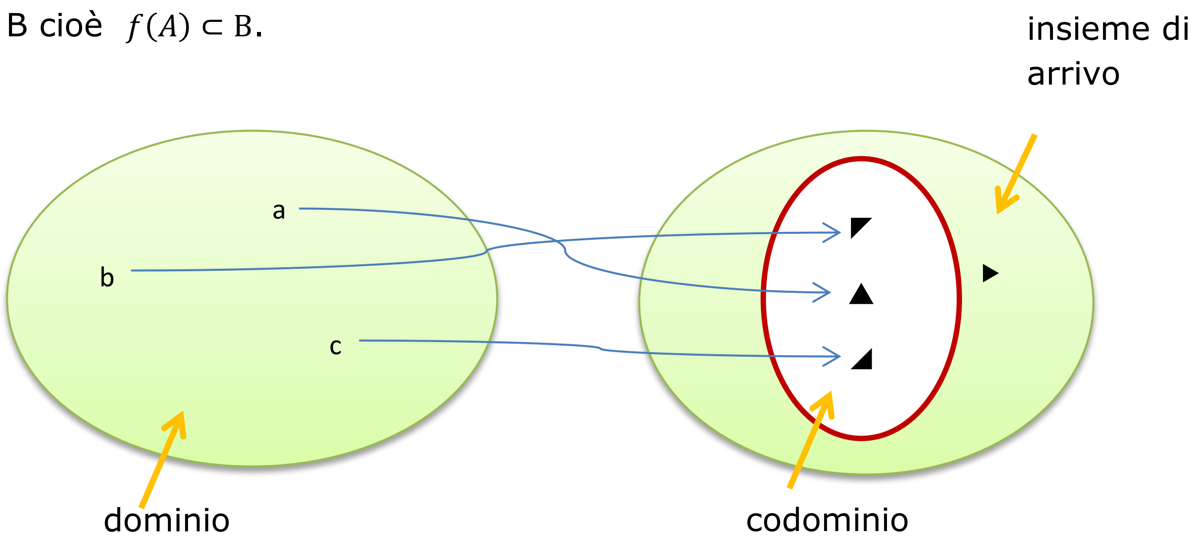
Per indicare una funzione si usa una lettera minuscola (spesso f, g oppure h) e si scrive $f: A \to B$ oppure $A \xrightarrow{f} B$

che si legge "f è una funzione da A in B".

Nel caso di funzioni reali di variabile reale, questa legge è espressa nella forma $y = f(x)$, cioè è descritta da un'espressione analitica, ossia una formula matematica.

L'elemento $y = f(x)$ che è associato ad un particolare elemento x si dice *immagine* di x; mentre ogni elemento di x di cui y è l'immagine si dice *controimmagine.*

L' insieme A viene detto dominio, campo di esistenza o insieme di definizione della funzione.
L'insieme delle immagini degli elementi di A viene detto codominio o insieme immagine e viene indicato con $f(A)$, esso in generale è un sottoinsieme proprio di B cioè $f(A) \subset \mathrm{B}$.

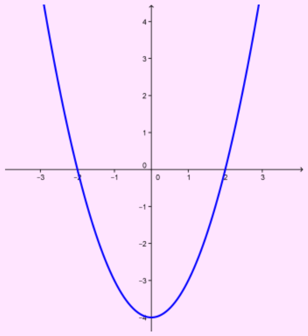


Si definisce grafico o diagramma cartesiano di una funzione numerica l'insieme dei punti $P(x; y)$ del piano cartesiano dove x è un numero reale nel dominio della funzione f e y è l'immagine di x cioè $y = f(x)$.

$$G(f) = \{(x; y)/x \in A, y = f(x)\}$$

ESEMPIO

Qui di seguito è rappresentato il grafico della funzione $y = x^2 - 4$

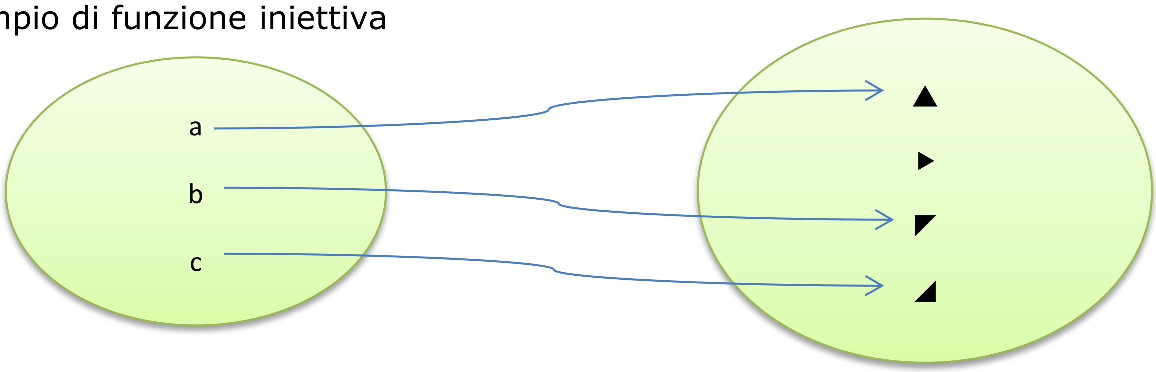


3. FUNZIONI INIETTIVE, SURIETTIVE E BIUNIVOCHE

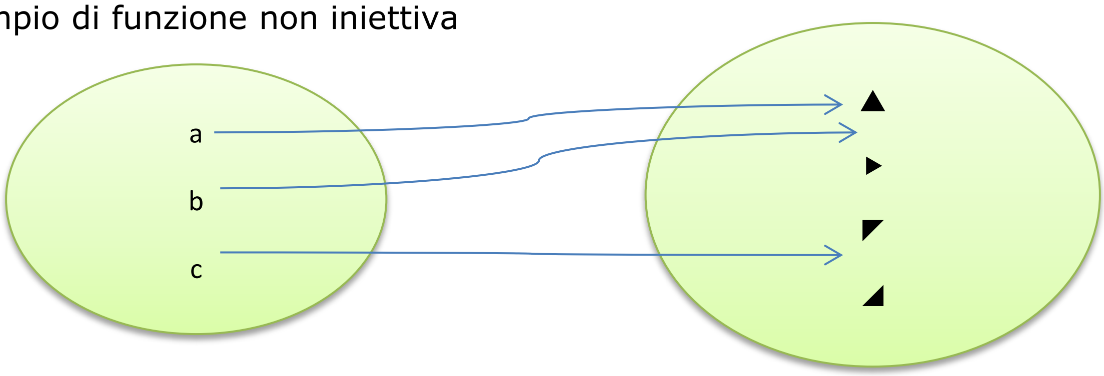
Sia $f: A \to B \quad y \in B$ una funzione.

Una funzione si dice iniettiva se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B, cioè se per ogni $x_{1,}x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$ si ottiene $f(x_1) \neq f(x_2)$, quindi per ogni $y \in B$ l'insieme $f^{-1}(y)$ o contiene un solo elemento oppure è vuoto.

Esempio di funzione iniettiva

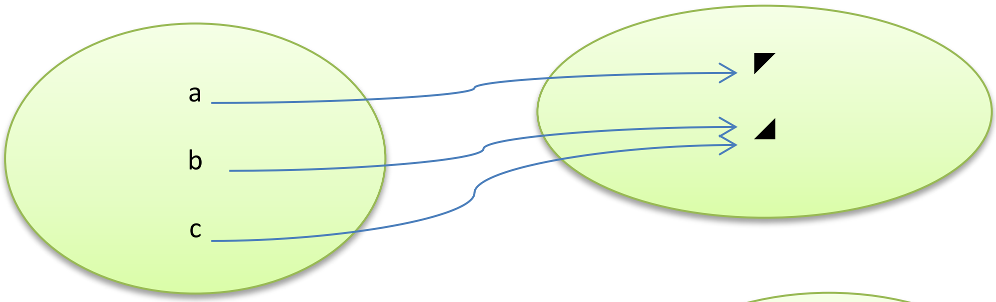


Esempio di funzione non iniettiva

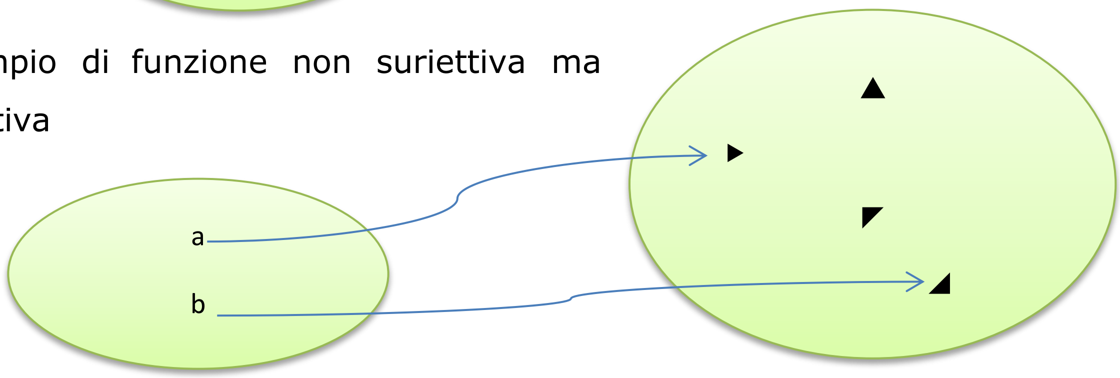


Una funzione si dice suriettiva se l'insieme delle immagini coincide con l'insieme di arrivo B, o in modo equivalente quando ogni elemento di B ammette almeno una controimmagine, quindi per ogni $y \in B$ l'insieme $f^{-1}(y)$ almeno un elemento.

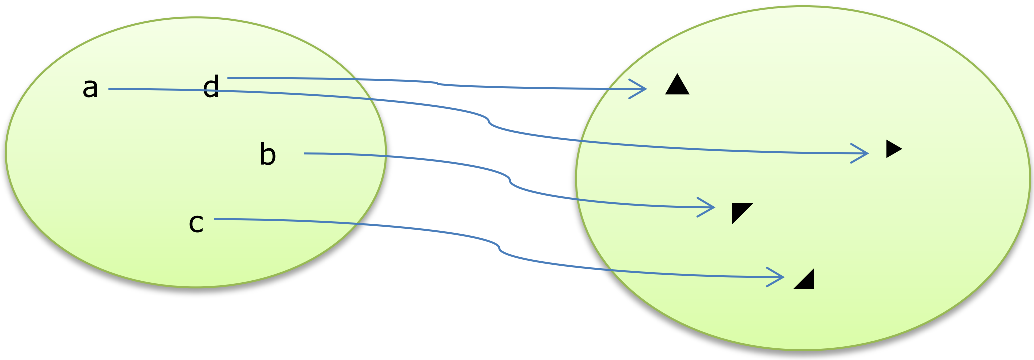
Esempio di funzione suriettiva



Esempio di funzione non suriettiva ma iniettiva



Una funzione si dice biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva, cioè quando ogni elemento di B ammette esattamente una controimmagine.



4. CLASSIFICAZIONE DELLE FUNZIONI

Consideriamo le funzioni reali di variabile reale e siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Indichiamo con $x \in A$ gli elementi del dominio e con $y \in B$ gli elementi del codominio.

Possiamo classificare le funzioni reali di variabile reale in base alla tipologia dell'espressione $y = f(x)$. Si avranno:

FUNZIONI ALGEBRICHE:

Funzioni razionali intere se $f(x)$ è un polinomio

- $f(x) = mx + q$ (lineari)
- $f(x) = ax^2 + bx + c \quad con \quad a \neq 0$ (quadratiche)

Funzioni razionali fratte se $f(x)$ è un frazione algebrica

- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad con \quad c \neq 0 \quad e \quad ad - bd \neq 0$ (omografiche)

Funzioni irrazionali se in $f(x)$ compaiono operazioni di estrazione di radice

ESEMPI

$y = x^4 - 3x^3 + 5$ è una funzione razionale intera

$y = \frac{x+4}{x^3}$ è una funzione razionale fratta

$y = \sqrt[3]{x^2 - 2x} + 3x - 1$ è una funzione irrazionale

FUNZIONI TRASCENDENTI:

Funzioni logaritmiche

- $f(x) = \log_a x \quad con \quad a > 0, a \neq 1$

Funzioni esponenziali

- $f(x) = a^x \quad con \quad a > 0$

Funzioni goniometriche

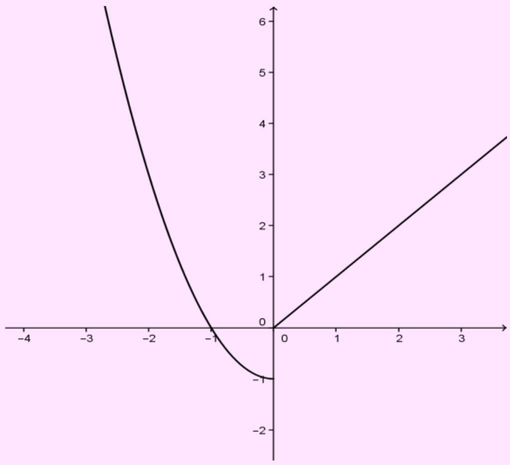
- $f(x) = \operatorname{sen} x$
- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = \tan x$

FUNZIONI DEFINITE A TRATTI:

Spesso capita di trovare funzioni definite da espressioni analitiche diverse in insiemi diversi, queste funzioni si dice che sono definite a tratti (o per casi).

ESEMPI

La funzione $y = \begin{cases} x & se \ \ x \geq 0 \\ x^2 - 1 & se \ \ x < 0 \end{cases}$



5. IL DOMINIO DI UNA FUNZIONE

Data una funzione la prima domanda che dobbiamo porci è: quali valori può assumere la variabile indipendente x affinché $f(x)$ abbia significato?

Per rispondere a questo quesito dobbiamo individuare il dominio della funzione, per farlo bisogna ricordare che:

- Una funzione algebrica razionale intera ha sempre significato nell'insieme dei numeri reali, quindi il suo dominio è $D = \mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$
- Una funzione algebrica razionale fratta $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ esiste solo se il suo denominatore non è nullo, quindi per determinare il suo dominio bisogna porre $Q(x) \neq 0$.
- Una funzione algebrica irrazionale con indice dispari $\sqrt[2n+1]{P(x)}$ ha sempre significato nell'insieme dei numeri reali, quindi il suo dominio è $D = \mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$.
- Una funzione algebrica irrazionale con indice pari $\sqrt[2n]{P(x)}$ esiste solo se il suo radicando è positivo o nullo, quindi per determinare il suo dominio dobbiamo porre $P(x) \geq 0$.

- Una funzione logaritmica $\log_a P(x)$ esiste solo se il suo argomento è positivo e se la sua base è un numero positivo e diverso da 1, quindi per determinare il suo insieme di definizione dobbiamo porre

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

- Una funzione esponenziale $y = a^{P(x)}$ esiste se esiste il suo esponente.
- Le funzioni seno e coseno esistono sempre in $\mathbb{R}$, la funzione tangente esiste se il suo argomento è diverso da $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

ESEMPI

1. $y = x^4 - 2x + 4$ è una funzione razionale intera, quindi $D = \mathbb{R}$ oppure $D = (-\infty; +\infty)$.

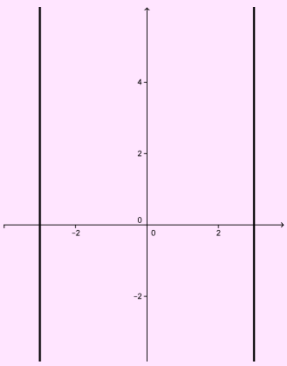
La funzione può essere rappresentata graficamente in tutto il piano cartesiano.

2. $y = \frac{2x+3}{x^2-9}$ è una funzione razionale fratta, quindi esiste quando il denominatore della frazione non è nullo, cioè dobbiamo imporre che sia:

$x^2 - 9 \neq 0$ cioè $x \neq \pm 3$

Il dominio sarà: $D = \mathbb{R} \backslash \{\pm 3\}$ oppure $D = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$

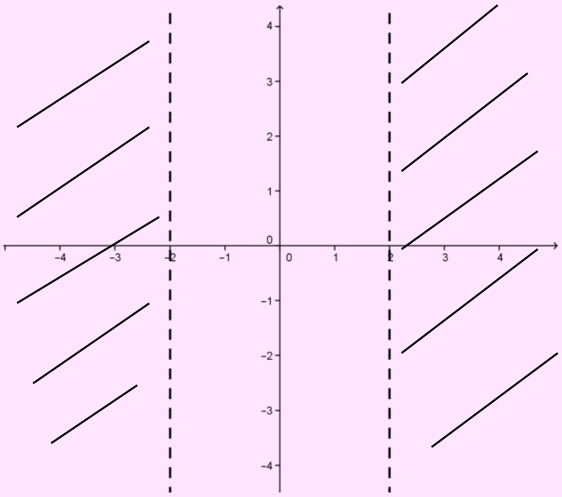
Graficamente questo significa che in corrispondenza delle rette di equazione $x = -3$ e $x = 3$, rappresentate con linea continua, non esistono punti del grafico.



3. $y = \sqrt{4 - x^2}$ è una funzione irrazionale con indice pari quindi esiste solo quando il radicando è maggiore o uguale a zero,

quindi se $x^2 - 4 \geq 0$ cioè svolgendo i calcoli se $-2 \leq x \leq 2$.

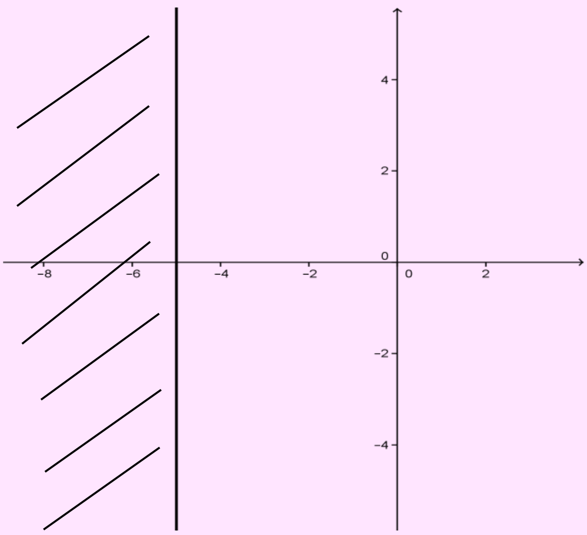
Il dominio sarà $D = [-2; 2]$. Siccome $-2 \; e \; 2$ appartengono al dominio della funzione, abbiamo delimitato la zona del grafico con delle linee tratteggiate.



4. $y = ln(x+5)$ è una funzione logaritmica quindi esiste solo quando l'argomento è positivo, quindi se $x + 5 > 0$ cioè per $x > -5$.

Il dominio sarà $D = (-5; +\infty)$.

Graficamente si avrà:



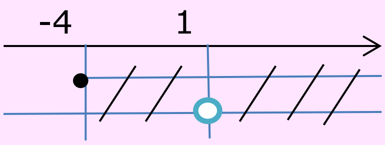
5. $y = \sqrt{x+4} + 2^{\frac{1}{x-1}}$

La funzione esiste per i valori di x che soddisfano il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 & per\ l'esistenza\ della\ radice \\ x-1 \neq 0 & per\ l'esistenza\ della\ frazione \end{cases}$$

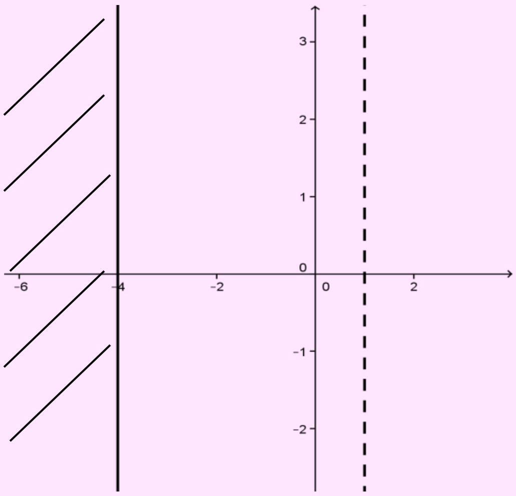
Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ x \neq 1 \end{cases}$$



Da cui deduciamo il dominio $D = [-4; 1) \cup (1; +\infty$

Graficamente si avrà:



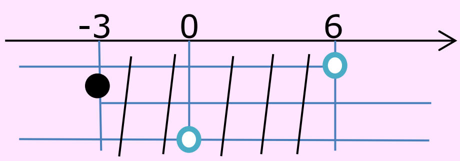
6. $y = \dfrac{ln(6-x)}{x} + \sqrt{x+3}$

La funzione esiste per i valori di x che soddisfano il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 6-x > 0 & per\ l'esistenza\ \ del\ logaritmo \\ x+3 \geq 0 & per\ l'esistenzadella\ radice \\ x \neq 0 & per\ l'esistenza\ della\ frazione \end{cases}$$

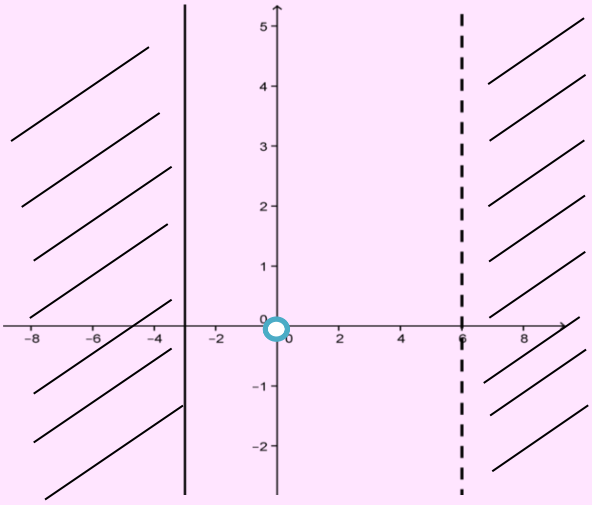
Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} x < 6 \\ x \geq -3 \\ x \neq 0 \end{cases}$$



Da cui deduciamo il dominio $D = [-3;0) \cup (0;6)$

Graficamente si avrà:



6. RICERCA DELLE INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI

INTERSEZIONI CON ASSE x: determinare le intersezioni con l'asse x significa algebricamente trovare gli zeri della funzione, cioè determinare quei numeri reali tali che $f(x) = 0$.

L'equazione $f(x) = 0$ è equivalente al sistema: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ risolverlo significa determinare le intersezioni del grafico della funzione $y = f(x)$ con l'asse x che è rappresentato dalla retta $y = 0$

INTERSEZIONI CON ASSE y: in modo analogo risolvere il sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$ significa determinare le intersezioni del grafico della funzione $y = f(x)$ con l'asse y rappresentato dalla retta $x = 0$.

ESEMPI

1. Determiniamo le intersezioni con gli assi cartesiani della seguente funzione:

$y = x^3 - 3x^2 - 4x$

Per determinare le intersezioni con l'asse x risolviamo il sistema $\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 - 4x \\ y = 0 \end{cases}$

oppure in modo equivalente l'equazione $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$

raccogliamo a fattor comune $x(x^2 - 3x - 4) = 0$

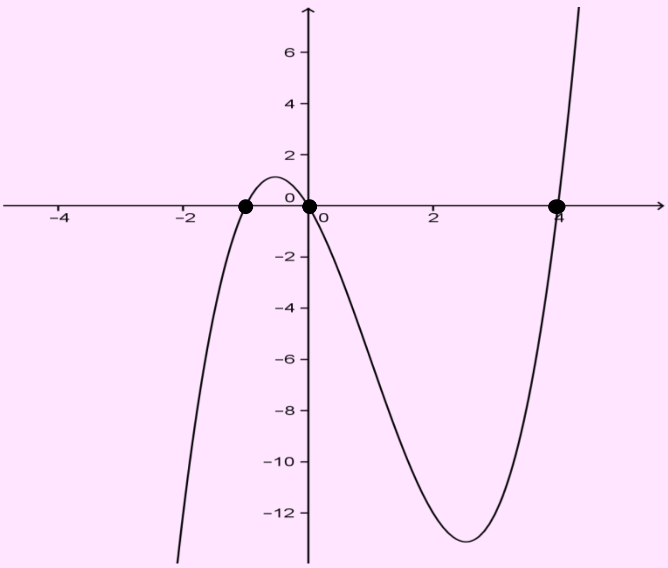
scomponiamo il trinomio di secondo grado

$x(x-4)(x+1) = 0$

Si ottengono le soluzioni $x = 0;\ x = 4; x = -1$, che rappresentano i punti $A(0;0), B(4;0)\ e\ C(-1;0)$ in cui la funzione interseca l'asse x.

Per determinare le intersezioni con l'asse y risolviamo il sistema $\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 - 4x \\ x = 0 \end{cases}$ sostituiamo a tutte le x della funzione il valore 0

ottenendo: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ che rappresenta il punto $A(0;0)$ già trovato in precedenza



7. STUDIO DEL SEGNO DI UNA FUNZIONE

Il passo successivo per la costruzione del grafico di una funzione è quello di determinare il segno della funzione cioè di determinare per quali valori del dominio la funzione risulta positiva e per quali valori di x risulta negativa.

La funzione è positiva negli intervalli che rappresentano la soluzione della disequazione in $f(x) > 0$, il grafico di tale funzione appartiene al semipiano positivo delle ordinate.

La funzione è negativa negli intervalli che rappresentano la soluzione della disequazione in $f(x) < 0$, il grafico di tale funzione appartiene al semipiano negativo delle ordinate.

ESEMPI

1. Determiniamo il dominio, le intersezioni con gli assi cartesiani e il segno della seguente funzione:

$$y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 1}$$

- La funzione esiste quando il denominatore della frazione non è nullo, cioè per $x - 1 \neq 0$ da cui segue $x \neq 1$

  Quindi il dominio sarà $D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
- Per determinare le intersezioni con l'asse x risolviamo il sistema $\begin{cases} y = \frac{x^2-x-6}{x-1} \\ y = 0 \end{cases}$ quindi l'equazione $\frac{x^2-x-6}{x-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0$

  $\Rightarrow \quad (x-3)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \;\vee\; x = -2$

  $A(-2,0)$ e $B(3;0)$ sono i punti d'intersezione con l'asse x
- Per determinare le intersezioni con l'asse y risolviamo il sistema $\begin{cases} y = \frac{x^2-x-6}{x-1} \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(0) = \frac{-6}{-1} = 6$

  $C(0;6)$ è il punto di intersezione con l'asse y
- Per determinare il segno della funzione, risolviamo la seguente disequazione $\frac{x^2-x-6}{x-1} > 0$

  $N > 0$ cioè $x^2 - x - 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+2) > 0 \quad \Rightarrow$

  $N_1 > 0 \quad x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 3$

  $N_2 > 0 \quad x + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -2$

  $D > 0 \quad x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1$ Studiando il segno

	-2		1		3	
-		-		-		+
-		-		+		+
-		+		+		+
-		+		-		+

Avremo che: $f(x) > 0$ nell'intervallo $(-2; 1) \cup (3; +\infty)$

$f(x) < 0$ nell'intervallo $(-\infty; -2) \cup (1; 3)$

8. PROPRIETA' E DEFINIZIONI

FUNZIONI PARI E DISPARI

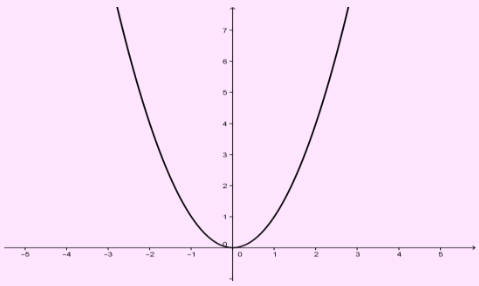
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che se $x \in A \Longrightarrow -x \in A$

Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice pari se $\forall x \in A \quad f(x) = f(-x)$

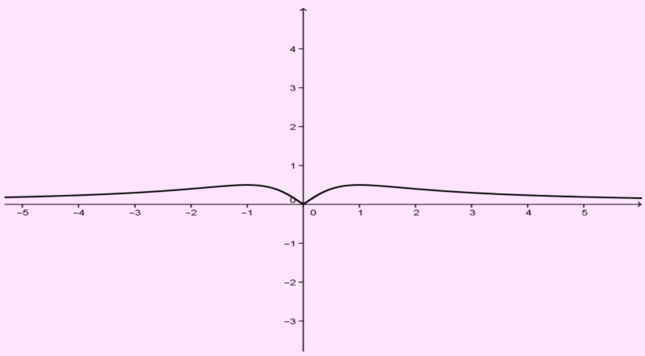
Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate

ESEMPI

La funzione $f(x) = x^2$ è pari



La funzione $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$ è pari

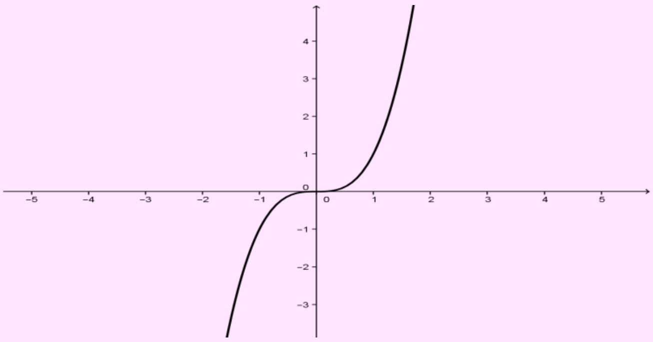


Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice dispari se $\forall x \in A \quad f(x) = -f(-x)$

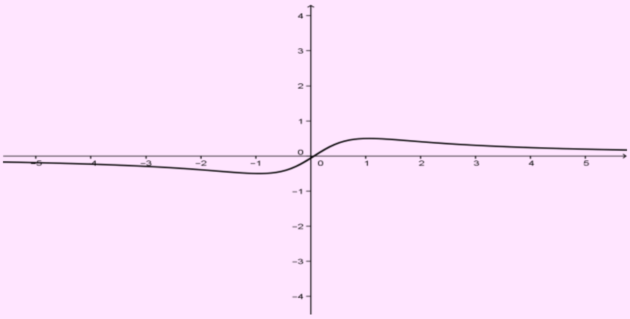
Il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

ESEMPI

La funzione $f(x) = x^3$ è dispari



La funzione $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ è dispari



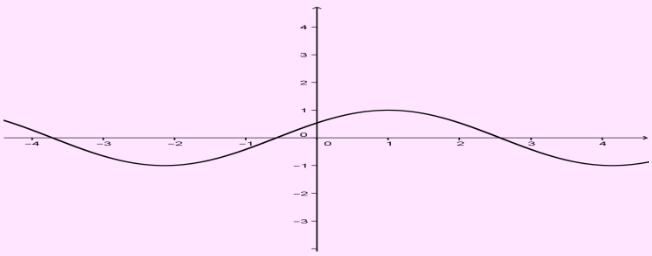
FUNZIONI PERIODICHE

Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ viene detta periodica di periodo $T > 0$ se T è il più piccolo numero reale tale che $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in A$

Sono periodiche tutte le funzioni goniometriche

ESEMPIO

$y = \cos(x-1)$ è una funzione periodica



FUNZIONI LIMITATE

La funzione $f: A \to \mathbb{R}$ viene detta limitata superiormente se il suo codominio $f(A)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente, cioè

se $\forall x \in A$ esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq K$.

La funzione $f: A \to \mathbb{R}$ viene detta limitata inferiormente se il suo codominio $f(A)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato inferiormente, cioè

se $\forall x \in A$ esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq K$.

La funzione $f: A \to \mathbb{R}$ viene detta limitata se il suo codominio $f(A)$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$, cioè

se $\forall x \in A$ esiste $L \geq 0$ tale che $|f(x)| \leq L$ che equivale a $-L \leq f(x) \leq L$

ESEMPI

1. $y = -\sqrt{x}$ è limitata superiormente

2. $y = e^x$ è limitata inferiormente

3. $y = \frac{1}{x^2+1}$ è limitata

4. $y = |x| = \begin{cases} x & se\ \ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$ è limitata inferiormente

MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI

La funzione $f: A \to \mathbb{R}$ ha massimo assoluto in A se il suo codominio $f(A)$ ammette massimo M cioè,

se esiste $x_M \in A$ tale che sia

$f(x_M) = M$

$f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in A$

x_M viene detto punto di massimo assoluto per f in A

OSSERVAZIONI

- Non è detto che una funzione limitata superiormente ammetta massimo
- Il massimo di f in A è unico, mentre i punti di massimo assoluto non sono necessariamente unici come esempio possiamo considerare la funzione $y = cos(x)$

La funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ha minimo assoluto in A se il suo codominio $f(A)$ ammette minimo m cioè,

se esiste $x_m \in A$ tale che sia

$f(x_m) = m$

$f(x) \geq f(x_m) \quad \forall x \in A$

x_m viene detto punto di minimo assoluto per f in A.

OSSERVAZIONI

- Non è detto che una funzione limitata inferiormente ammetta minimo ad esempio la funzione esponenziale $y = e^x$ è limitata inferiormente ma non ha un punto di minimo.
- Il minimo di f in A è unico, mentre i punti di minimo assoluto non sono necessariamente unici come esempio se consideriamo la funzione $y = cos(x)$ ha come minimo $m = -1$ ma ha infiniti punti x_m di minimo.

ESTREMO SUPERIORE ED INFERIORE DI UNA FUNZIONE

Se f non è limitata superiormente chiamiamo estremo superiore di f in A l'estremo superiore del codominio e si scrive $sup(f) = sup\big(f(A)\big)$ se f non è limitata superiormente si pone per convenzione $sup(f) = +\infty$

Se f non è limitata inferiormente chiamiamo estremo inferiore di f in A l'estremo inferiore del codominio e si scrive $inf\,(f) = inf\big(f(A)\big)$ se f non è limitata inferiormente si pone per convenzione $inf(f) = -\infty$

OSSERVAZIONE

I numeri reali $sup(f)$ e $inf(f)$ non appartengono necessariamente al codominio di f. Se vi appartengono allora coincidono con il $\max(f)$ e il $min(f)$.

FUNZIONI MONOTONE

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione $f: A \to \mathbb{R}$

- Si dice che la funzione f è crescente in senso stretto (o crescente) in A se $\forall x_1, x_2 \in A$ da $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Si dice che la funzione f è decrescente in senso stretto (o decrescente) in A se $\forall x_1, x_2 \in A$ da $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Si dice che la funzione f è crescente in senso lato(o non decrescente)in A se $\forall x_1, x_2 \in A$ da $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Si dice che la funzione f è decrescente in senso lato(o non crescente)in A se $\forall x_1, x_2 \in A$ da $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Si dice monotona una funzione che è crescente o decrescente $\forall x_1, x_2 \in A$

Teorema: se $f: A \to \mathbb{R}$ è una funzione crescente (o decrescente) allora f è una funzione iniettiva.

FUNZIONI CONCAVE E CONVESSE

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e una funzione $f: I \to \mathbb{R}$

- Si dice che la funzione f è concava in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ la corda congiungente i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ del grafico non giace al di sopra di esso.
- Si dice che la funzione f è convessa in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ la corda congiungente i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ del grafico non giace al di sotto di esso.
- Si possono introdurre anche le nozioni di funzioni strettamente concave e strettamente convesse, richiedendo che la corda stia tutta al di sotto, o al di sopra del grafico di f.

FUNZIONI COMPOSTE

Siano f e g due funzioni tali che $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: B \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subseteq B$

Se $\forall x \in A$ l'immagine $f(x)$ appartiene al dominio di g e risulta quindi definita una funzione che associa ad ogni $x \in A$ l'elemento $g(f(x))$

$$x \in A \to f(x) \in B \to g(f(x))$$

Questa funzione viene denominata funzione composta di f e g e si indica con $g \circ f$.

Quando $f(A) \subseteq B$, si può definire la funzione composta $g \circ f: A \to \mathbb{R}$ ponendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

OSSERVAZIONI

- Se esiste la funzione composta $g \circ f$ non è detto che esista $f \circ g$. Ad esempio se consideriamo le funzioni $f(x) = -x^2$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, avremo che: $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2}}$ non esiste

  mentre $(f \circ g)(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ esiste
- In generale $(f \circ g) \neq (g \circ f)$, infatti se consideriamo ad esempio le finzioni $f(x) = x - 4$ e $g(x) = x^2$ avremo che:

  $(g \circ f)(x) = (x-4)^2$ mentre $(f \circ g)(x) = x^2 - 4$
- Se $f(A) \nsubseteq B$ ma $f(A) \cap B \neq \emptyset$ possiamo considerare una restrizione f_1 della f ad un sottoinsieme $A_1 \subset A$ in modo che $f_1(A_1) \subseteq B$ e definire la funzione composta $g \circ f_1: A \to \mathbb{R}$.

FUNZIONI INVERSA

Sia f una funzione definita in modo che sia suriettiva $[f: A \to f(A)]$ e iniettiva quindi ad ogni elemento del codominio corrisponde una sola controimmagine.

Quindi si può definire una funzione che avrà $f(A)$ come dominio e A come codominio che viene detta funzione inversa di f e viene indicata con f^{-1}

$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$

Per trovare l'espressione analitica della funzione inversa si deve esplicitare dalla relazione $y = f(x)$ la variabile x in funzione della variabile y.

Non è sempre possibile però ottenere un'espressione esplicita della funzione inversa. Ad esempio la funzione $y = x + lnx$.

OSSERVAZIONI

- Il grafico di f^{-1} è simmetrico a quello di f rispetto alla bisettrice del primo e secondo quadrante di equazione $y = x$
- $(f \circ f^{-1})(x) = x \qquad \forall x \in A$
- $(f^{-1} \circ f)(y) = y \qquad \forall y \in f(A)$

ESEMPI

1. Data la funzione $f(x) = \frac{x+3}{x}$ determinare la sua inversa $f^{-1}(y)$

Partendo da $y = \frac{x+3}{x}$ e svolgendo i seguenti calcoli per esplicitare le x

$\frac{xy}{x} = \frac{x+3}{x} \quad \Rightarrow \quad xy - x = 3 \quad \Rightarrow \quad x(y-1) = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{y-1}$

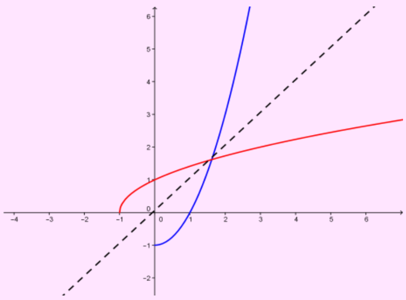
Si ottiene la funzione inversa $f^{-1}(y) = \frac{3}{y-1}$

2. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 - 1$

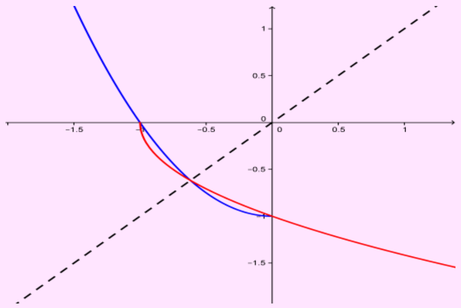
di dominio $D = \mathbb{R}$ e codominio $f(D) = [-1, +\infty)$. La funzione non è iniettiva in D ma lo diventa nei seguenti intervalli $D_1 = [0, +\infty)$ e $D_2 = (-\infty, 0]$.

Se consideriamo la restrizione $f_1: D_1 \rightarrow [-1, +\infty)$ della f possiamo determinare la funzione inversa ${f_1}^{-1}: [-1, +\infty) \rightarrow D_1$ cioè ${f_1}^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

Graficamente si avrà



Consideriamo ora la restrizione $f_2: D_2 \rightarrow [-1, +\infty)$ la funzione inversa ${f_2}^{-1}: [-1, +\infty) \rightarrow D_2$ sarà ${f_2}^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$ e graficamente si avrà:



3. Sia $y = e^{x}$ la funzione esponenziale.

Questa funzione è monotona quindi è iniettiva. Risulta quindi definita la sua inversa $f^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ che come già sappiamo è la funzione logaritmica $f^{-1}(x) = \ln x$

Ricordiamo le seguenti proprietà:

$\ln e^{x} = e^{x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^{\ln x} = x, \qquad \forall x \in (0; +\infty)$

Graficamente vediamo che le due funzioni sono simmetriche rispetto alla bisettrice $y = x$ del primo e secondo quadrante