CAPITOLO 4

CALCOLO INTEGRALE

1. UN PO' DI STORIA

Anche se la teoria dell'integrazione si è sviluppata soprattutto a partire dall'epoca di Riemann (1850), alcune idee e metodi traggono spunto da molto prima e risalgono a matematici come Euclide, Eudosso di Cnide ed Archimede. Altri matematici che hanno avuto un ruolo importante nello sviluppo della teoria dell'integrazione di Riemann sono Leibnitz e Newton.

Quindi le origini del calcolo integrale risalgono fino ai geometri greci i quali, nella ricerca di aree e volumi, seppero ottenere risultati ammirevoli. In termini moderni si integra generalmente una funzione, ma in antichità le funzioni non esistevano e i problemi di integrazione erano di natura esclusivamente geometrica.

Geometria e funzioni, apparentemente concetti distaccati, hanno generato ed adottato lo stesso metodo di analisi che ha superato indenne quasi tremila anni di storia.

Il procedimento adottato nell'antichità parte da un sistema di analisi infinitesimale chiamato metodo di esaustione. Inventato da Eudosso di Cnido (CNIDO, 406-355 A.C.), filosofo seguace di Platone, è però ad Archimede che si deve l'uso sistematico di questo metodo, che si basava sull'idea di inscrivere e circoscrivere figure rettilinee attorno ad una figura curva e di continuare a moltiplicare indefinitamente il numero dei lati del poligono fino ad approssimare il più possibile la linea curva.

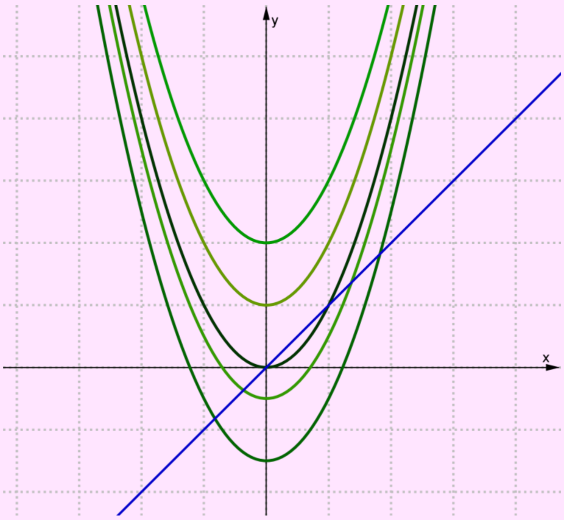
Anche Euclide (300 a.C.) nel libro "Gli Elementi" ha fornito un metodo per calcolare alcuni volumi ed aree, principalmente di prismi e piramidi inoltre ha fatto anche qualche considerazione sulla quadratura del cerchio.

2. IL CONCETTO DI PRIMITIVA

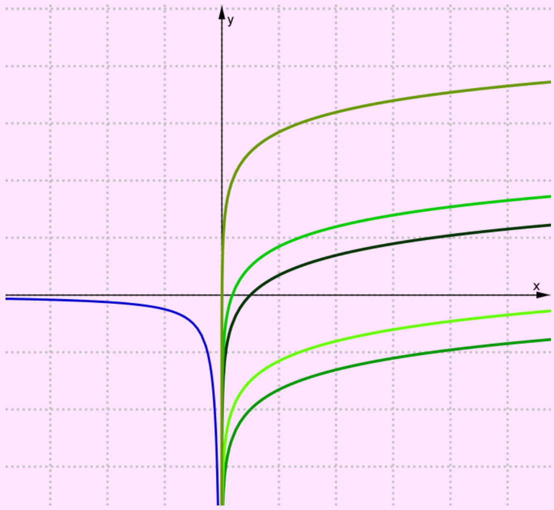
Consideriamo una funzione $f:(a,b) \to \mathbb{R}$. Definiamo primitiva di f una funzione F derivabile nell'intervallo aperto (a,b) se: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

ESEMPI

1. La primitiva della funzione $f(x) = x$ nel suo dominio $(-\infty, +\infty)$ è $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, ma non è l'unica primitiva anche la funzione $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$ è una primitiva della funzione $f(x) = x$ e k è una costante reale arbitraria.



2. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo $(\infty - ,0)$ ha come primitiva $F(x) = lnx$, ma anche la funzione $F(x) = lnx + k$ è una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, e k è una costante reale arbitraria.



Da questi esempi possiamo concludere che la primitiva di una funzione non è unica, lo possiamo dedurre anche dal seguente teorema di Lagrange.

Teorema: Se una funzione f ammette una primitiva F in un intervallo (a, b) allora ne ammette infinite e sono tutte della forma $F(x) + k$ dove $k \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

I grafici di tutte le primitive di una funzione si ottengono uno dall'altro per traslazione lungo l'asse delle ordinate. Un modo per determinare una delle primitive di f consiste nell'assegnare il suo valore y_0 in corrispondenza di un punto $x_0 \in (a, b)$, cioè imponendo all'insieme delle primitive il passaggio per il punto $(x_0; y_0)$.

ESEMPIO

Tra le primitive $F(x) = x^3 - 2x + k$ di $f(x)$ determina quella che passa per il punto $A(1;3)$.

Per determinare la primitiva passante per A dobbiamo sostituire le coordinate di A alla funzione $F(x)$ per determinare il valore della costante k.

Avremo: $3 = 1 - 2 + k$ e svolgendo i calcoli si ottiene $k = 4$

Quindi $F(x) = x^3 - 2x + 4$ rappresenta tra le primitive di f quella che passa per il punto A.

Una funzione f che ammette primitive $F(x) + k$ viene detta integrabile. Non tutte le funzioni sono integrabili. Si può dimostrare che le funzioni continue in un intervallo (a, b) sono sicuramente integrabili in tale intervallo.

Non è sempre facile determinare le primitive di funzioni continue in quanto le primitive di funzioni elementari non sono a loro volta elementari. Ad esempio la primitiva di $(x^2 - 2x)^3$ non si può esprimere come combinazione finita di funzioni elementari.

Una funzione f si dirà integrabile elementarmente se le sue primitive si ottengono combinando un certo numero di funzioni elementari.

L'insieme di tutte le primitive di f in un intervallo (a, b) si indica con il simbolo $\int f(x)dx$ e viene detto integrale indefinito di f nelli'intervall0 (a, b). L'integrale indefinito rappresenta quindi un insieme di funzioni. Se F è una primitiva di f si avrà:

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

Dove $f(x)$ è detta funzione integranda e x variabile d'integrazione.

3. PRIMITIVE DI FUNZIONI ELEMENTARI

Di seguito è riportata la tabella con tutte le primitive immediate, suddivise per tipologia di funzione:

- primitive di funzioni: costante, potenza e radice
- primitive di funzioni esponenziali
- primitive di funzioni goniometriche

FUNZIONI COSTANTI, POTENZE E RADICI	
FUNZIONE $f(x)$	**PRIMITIVA** $F(x)$

Costante $f(x) = c$	$\int f(x)dx = x + k$
$f(x) = x$	$\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + k$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\int f(x)dx = \ln\lvert x\rvert + k$
$f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq -1$	$\int f(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + k$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\int f(x)dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\int f(x)dx = 2\sqrt{x} + k$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\int f(x)dx = -\frac{1}{x} + k$
FUNZIONI ESPONENZIALI	
FUNZIONE $\boldsymbol{f(x)}$	**PRIMITIVA** $\boldsymbol{F(x)}$
$f(x) = a^x$ con $a > 0,\ a \neq 1$	$\int f(x)dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$
$f(x) = e^x$	$\int f(x)dx = e^x + k$
FUNZIONI GONIOMETRICHE	
FUNZIONE $\boldsymbol{f(x)}$	**PRIMITIVA** $\boldsymbol{F(x)}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\int f(x)dx = -\cos x + k$
$f(x) = \cos x$	$\int f(x)dx = sen\ x + k$
$f(x) = \frac{1}{cos^2 x}$	$\int f(x)dx = \tan x + k$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int f(x)dx = \arctan x + k$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int f(x)dx = arcsen\ x + k$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int f(x)dx = -\arccos x + k$

ESEMPI

1. Calcoliamo l'integrale immediato $\int x^4\,dx$

Applicando le regole della tabella sulle funzioni potenza si avrà: $\int x^4\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + k = \frac{x^5}{5} + k$

2. Calcoliamo l'integrale immediato $\int \frac{1}{x^5}dx$

Prima di integrare trasformiamo la funzione in una potenza

$$\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx$$

Applicando le regole della tabella avremo:

$$\int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + k = \frac{x^{-4}}{-4} + k = -\frac{1}{4x^4} + k$$

3. Calcoliamo l'integrale immediato $\int \sqrt[4]{x^3}\,dx$

Prima di integrare trasformiamo la funzione in una potenza

$$\int \sqrt[4]{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{4}}dx$$

Applicando le regole della tabella avremo:

$$\int x^{\frac{3}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + k = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + k = \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + k = \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + k$$

4. Calcoliamo l'integrale immediato $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

Prima di integrare trasformiamo la funzione in una potenza

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{3}}dx$$

Applicando le regole della tabella avremo:

$$\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + k = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + k = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + k$$

4. METODI DI INTEGRAZIONE

INTEGRAZIONE PER SCOMPOSIZIONE

Se f e g sono due funzioni integrabili in un intervallo (a, b) allora la funzione $f + g$ sarà integrabile in (a, b) e si avrà:

$$\int (f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Più in generale se k_1 e k_2 sono due numeri reali

$$\int (k_1 f(x) + k_2 g(x)dx = k_1 \int f(x)dx + k_2 \int g(x)dx$$

Cioè se una funzione è somma di funzioni elementari, possiamo calcolare il suo integrale come somma degli integrali di ciascun addendo; questo metodo prende il nome di metodo per scomposizione.

ESEMPI

1. Calcoliamo

$$\int (x^3 + 3x - 2)\, dx$$

Applicando il metodo per scomposizione avremo:

$$\int (x^3 + 3x - 2)\, dx = \int x^3\, dx + 3\int xdx - 2\int dx$$

Quindi per le regole degli integrali immediati avremo:

$$\int x^3\, dx + \int 3xdx - \int 2dx = \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} - 2x + k$$

2. Calcoliamo

$$\int \left(e^x - 2x^2 - \frac{1}{x}\right) dx$$

Applicando il metodo per scomposizione avremo:

$$\int \left(e^x - 2x^2 - \frac{1}{x}\right) dx = \int e^x\, dx - 2\int x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx$$

Quindi per le regole degli integrali immediati avremo:

$$\int e^x\, dx - 2\int x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx = e^x - 2\frac{x^3}{3} - ln|x| + k$$

3. Calcoliamo

$$\int \frac{x^2+2}{x}dx$$

Trasformiamo la funzione da integrare come somma di funzioni potenza dividendo il polinomio a numeratore per monomio a denominato:

$$\int \frac{x^2+2}{x}dx = \int \left(\frac{x^2}{x}+\frac{2}{x}\right)dx = \int \frac{x^2}{x}dx + 2\int \frac{1}{x}dx$$

Quindi per le regole degli integrali immediati avremo:

$$\int x\,dx + 2\int \frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2} + 2ln|x| + k$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

Questo metodo si integrazione è una generalizzazione delle integrazioni immediate, ad esempio se volessimo integrare una funzione $y=(3x+4)^5$ che è la potenza di una funzione $f(x)=3x+4$, si può procedere in modo simile a quello utilizzato per integrare la funzione $y=x^\alpha$, a patto di avere nella funzione integranda, come fattore moltiplicativo, la derivata della funzione f, quindi nel nostro esempio sarà possibile applicare la stessa regola di $\int x^\alpha dx$ se nell'integrale $\int (3x+4)^5$ comparirà come fattore la derivata di $f(x)=3x+4$, cioè $f'(x)=3$, per facilitarci il compito possiamo aiutarci utilizzando la seguente tabella:

PRIMITIVE DI FUNZIONI COMPOSTE	
FUNZIONE	**PRIMITIVA**
$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$	$\int \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)dx = \ln\lvert f(x)\rvert + k$
$[f(x)]^\alpha \cdot f'(x)$ con $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq -1$	$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1} + k$
$\sqrt{f(x)}\cdot f'(x)$	$\int \sqrt{f(x)}\cdot f'(x)\ \ dx = \frac{2}{3}\sqrt{[f(x)]^3} + k$
FUNZIONI ESPONENZIALI	
FUNZIONE	**PRIMITIVA**

$a^{f(x)} \cdot f'(x)$ con $a > 0,\ a \neq 1$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + k$
$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + k$
FUNZIONI GONIOMETRICHE	
FUNZIONE	**PRIMITIVA**
$\operatorname{sen} f(x) \cdot\ f'(x)$	$\operatorname{sen} f(x) \cdot\ f'(x)dx = -\cos f(x) + k$
$\cos f(x) \cdot f'(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)dx = sen\ f(x) + k$
$\dfrac{f'(x)}{cos^2 x}$	$\dfrac{f'(x)}{cos^2 x} dx = \tan f(x) + k$
$\dfrac{f'(x)}{1 + x^2}$	$\dfrac{f'(x)}{1 + x^2} dx = \arctan f(x) + k$
$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}\, dx = arcsenf(x) + k$
$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} dx = -\arccos f(x) + k$

ESEMPI

1. Calcoliamo l'integrale:

$$\int (3x - 2)^4\, dx$$

La funzione da integrare è una funzione composta del tipo $[f(x)]^\alpha$ per poter applicare la formula della funzione potenza il fattore $(3x - 2)^4$ dovrebbe essere moltiplicato per la derivata di $f(x) = 3x - 2$ cioè per $f'(x) = 3$ quindi essendo la derivata una costante con un "magheggio " moltiplicando e dividendo per 3 otteniamo:

$$\int (3x - 2)^4\, dx = \int \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (3x - 2)^4\, dx = \frac{1}{3} \int 3 \cdot (3x - 2)^4\, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x - 2)^{4+1}}{4 + 1} + k$$

Quindi

$$\int (3x-2)^4\,dx = \frac{(3x-2)^5}{15} + k$$

2. Calcoliamo l’integrale:

$$\int e^{4x-1}\,dx$$

La funzione integranda è una funzione composta del tipo $e^{f(x)}$ per poter applicare la formula della funzione potenza il fattore e^{4x-1} dovrebbe essere moltiplicato per la derivata di $f(x)=4x-1$ cioè per $f'(x)=4$ quindi moltiplicando e dividendo per 4 otteniamo:

$$\int e^{4x-1}\,dx = \int \frac{1}{4}\cdot 4\cdot e^{4x-1}\,dx = \frac{1}{4}\int 4\cdot e^{4x-1}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x-1} + k$$

Negli esempi abbiamo visto che per ricondurre un integrale a una delle forme della tabella delle funzioni composte risulta spesso utile moltiplicare e dividere per una costante. Sarebbe però un gravissimo errore moltiplicare e dividere per una variabile.

ESEMPIO

Calcoliamo l’integrale:

$$\int (x^2-2)^2\,dx$$

La funzione da integrare è una funzione composta del tipo $[f(x)]^\alpha$ per poter applicare la formula della funzione potenza il fattore $(3x-2)^4$ dovrebbe essere moltiplicato per la derivata di $f(x)=x^2-2$ cioè per $f'(x)=2x$, ma in questo caso **NON** possiamo moltiplicare per $\mathbf{2x}$ perché **non è una costante.**

Quindi dovremo trovare un’altra strategia di calcolo.

Ad esempio si potrebbe sviluppare il quadrato di binomio ottenendo:

$$\int (x^2-2)^2\,dx = \int (x^4-4x^2+4)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x + k$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Questo metodo d’integrazione viene usato quando la funzione integranda è il prodotto di due funzioni, una delle quali è facilmente integrabile.

Consideriamo le funzioni f e g entrambi derivabili allora si può dimostrare la validità della seguente uguaglianza:

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)dx$$

Dove $F(x)$ è la primitiva di $f(x)$ mentre $g'(x)$ è la derivata di $g(x)$.

Il fattore $f(x)$ deve essere facilmente integrabile, mentre fattore $g(x)$ si deve semplificare con la derivazione.

ESEMPI

1. Calcoliamo l'integrale:

$$\int x\cdot \ln x\,dx$$

Possiamo integrare per parti perché la funzione integranda è il prodotto di due funzioni $f(x)=x$ e $g(x)=\ln x$

In questo caso la primitiva di $f(x)=x$ è $F(x)=\frac{x^2}{2}$

Mentre la derivata di $g(x)=\ln x$ è $g'(x)=\frac{1}{x}$

Quindi applicando la formula di integrazione per parti avremo:

$$\frac{x^2}{2}ln\,x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + k = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + k$$

2. Calcoliamo l'integrale:

$$\int \ln x\,dx$$

Possiamo integrare per parti perché possiamo trasformare la funzione integranda nel prodotto di due funzioni $f(x)=1$ e $g(x)=\ln x$

In questo caso la primitiva di $f(x)=1$ è $F(x)=x$

Mentre la derivata di $g(x)=\ln x$ è $g'(x)=\frac{1}{x}$

Quindi applicando la formula di integrazione per parti avremo:

$$x\,ln\,x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x + k = x(\ln x - 1) + k$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Siano $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi di grado rispettivamente n ed m, e sia $f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$

una funzione integrabile nell'intervallo (a, b), per calcolare le sue primitive dobbiamo considerare i seguenti casi:

$n < m$ quando ci troviamo in questo caso dobbiamo distinguere tre casi:

a) $B(x)$ ammette m radici reali e distinte
b) $B(x)$ ammette m radici reali non tutte distinte
c) $B(x)$ non ammette radici reali

Analizziamo i vari casi con degli esempi:

ESEMPI

1. Calcoliamo l'integrale:

$$\int \frac{3}{x^2 + x - 6} dx$$

il polinomio a denominatore ha $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ quindi avrà radici reali e distinte, in questo caso il procedimento per risolvere l'integrale sarà:

- si scompone il denominatore in fattori (utilizzando o le regole del trinomio particolare o le regola della scomposizione del trinomio di secondo grado)

$$\frac{3}{(x-2)(x+3)}$$

- si trasforma la frazione per determinare due numeri reali A e B tali che:

$$\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)} = \frac{3}{(x-2)(x+3)}$$

- si esegue la somma algebrica:

$$\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

- Si svolgono i calcoli a numeratore e raggruppiamo i termini in x e i termini noti:

$$\frac{Ax + 3A + Bx - 2B}{(x-2)(x+3)} = \frac{x(A+B) + 3A - 2B}{(x-2)(x+3)}$$

- La frazione così ottenuta dovrà essere uguale a quella della funzione integranda questo accadrà se saranno uguali i coefficienti dei termini dello stesso grado:

$$\begin{cases} A + B = 0 & uguaglianza\ dei\ coefficienti\ di\ x \\ 3A - 2B = 3 & uguaglianza\ tra\ i\ termini\ noti \end{cases}$$

- Si risolve il sistema e si ottiene:

  $A = \frac{3}{5}$ e $B = -\frac{3}{5}$

- Quindi risulterà $\frac{3}{(x-2)(x+3)} = \frac{\frac{3}{5}}{(x-2)} + \frac{-\frac{3}{5}}{(x+3)}$
- Sarà quindi immediato il calcolo dell'integrale della funzione data:

$$\int \frac{3}{x^2 + x - 6} dx = \frac{3}{5} \int \frac{1}{(x-2)} dx - \frac{3}{5} \int \frac{1}{(x-2)} dx$$

$$= \frac{3}{5} \int \frac{1}{(x-2)} dx - \frac{3}{5} \int \frac{1}{(x-2)} dx = ln|x-2| - ln|x+3| + k = ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + k$$

2. Calcoliamo l'integrale:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx$$

il polinomio a denominatore ha $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ quindi avrà radici reali e coincidenti, dunque è il quadrato di un binomio e possiamo ricondurci a forme già studiate.

Si avrà:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int (x+2)^{-2} dx = \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + k = -\frac{1}{x - 2 + k}$$

3. Calcoliamo l'integrale:

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 - 6x + 9} dx$$

In questo caso, come nell'esercizio precedente, il polinomio a denominatore ha $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ quindi avrà radici reali e coincidenti, dunque il polinomio è il quadrato di un binomio e potremo quindi ricondurci a forme già studiate.

Trasformiamo il numeratore in modo da avere la derivata del denominatore :

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 - 6x + 9} dx = \int \frac{2x - 6 + 6 - 1}{x^2 - 6x + 9} dx = \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 9} dx + \int \frac{5}{(x-3)^2} dx$$

Raccogliendo, semplificando e trasformando le funzioni così ottenute si avrà:

$$2\int \frac{(x-3)}{(x-3)^2}dx + 5\int (x-3)^{-2}\,dx = 2\ln|x-3| - \frac{5}{x-3} + k$$

4. Calcoliamo l'integrale:

$$\int \frac{1}{4x^2+4x+3}dx$$

il polinomio a denominatore ha $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ quindi non avrà radici reali, dobbiamo in questo caso trasformare il denominatore in modo che sia la somma di un quadrato di binomio con un numero positivo:

$$4x^2+4x+3 = 4x^2+4x+1 - 1 + 3 = (2x+1)^2 + 2$$

Quindi

$$\int \frac{1}{4x^2+4x+3}dx = \int \frac{1}{(2x+1)^2+2}dx$$

Poiché la derivata di $2x+1$ è 2, dobbiamo trasformare ulteriormente la funzione da integrare, moltiplicando e dividendo per 2:

$$\int \frac{1}{(2x+1)^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{(2x+1)^2+2}dx$$

Applichiamo ora la regola della funzione composta

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+m}dx = \frac{1}{\sqrt{m}} arctan \frac{x}{\sqrt{m}} + k$$

ed otteniamo:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2}{(2x+1)^2+2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + k = \frac{1}{2\sqrt{2}} arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + k$$

$n \geq m$ in questa situazione dobbiamo eseguire la divisione tra i due polinomi per trasformare la funzione:

$$\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{A(x)}}{\mathrm{B(x)}} = \mathrm{Q(x)} + \frac{\mathrm{R(x)}}{\mathrm{B(x)}}$$

Dove il polinomio $Q(x)$ è il quoziente della divisione, mentre $R(x)$ è il resto della divisione ed è un polinomio di un grado inferiore a m.

L'integrazione di $Q(x)$ risulta ora immediata essendo un polinomio, mentre per l'integrazione di $\frac{R(x)}{B(x)}$ ci siamo ricondotti al caso in cui il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore.

Quindi in questo caso avremo:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{B(x)} dx$$

ESEMPIO

Calcoliamo l'integrale:

$$\int \frac{x^3 + 3x + 5}{x + 1} dx$$

Il polinomio a numeratore della funzione integranda è di grado superiore a quello del denominatore, dobbiamo quindi eseguire la divisione tra polinomi:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + \ \dots + 3x + 5 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 - x^2 \quad\quad\quad & x^2 - x + 4 \\ \hline
-x^2 + 3x + 5 & \\
x^2 + x \quad\ & \\ \hline
4x + 5 & \\
-4x - 4 & \\ \hline
1 &
\end{array}$$

Quindi abbiamo ottenuto $x^2 - x + 4$ come quoziente e 1 come resto, possiamo scrivere la funzione $f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$

$$\int \frac{x^3 + 3x + 5}{x + 1} dx = \int (x^2 - x + 4)\, dx \int \frac{1}{x + 1} dx$$

Da cui si ottiene:

$$\int (x^2 - x + 4)\, dx + \int \frac{1}{x + 1} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x + \ln|x| + k$$

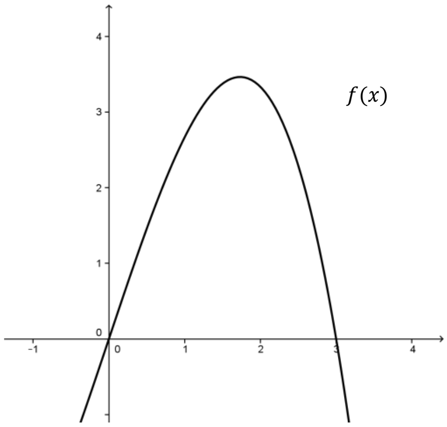
5. INTEGRALI DEFINITI

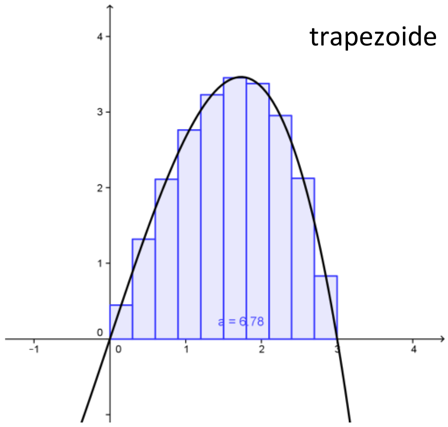
Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa.

Ci poniamo ora il problema di determinare l'area della regione piana compresa tra la funzione $f(x)$ dalle rette $x = a$, $x = b$ e dall'asse x cioè:

$$A = \{(x; y): x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

detta trapezoide.



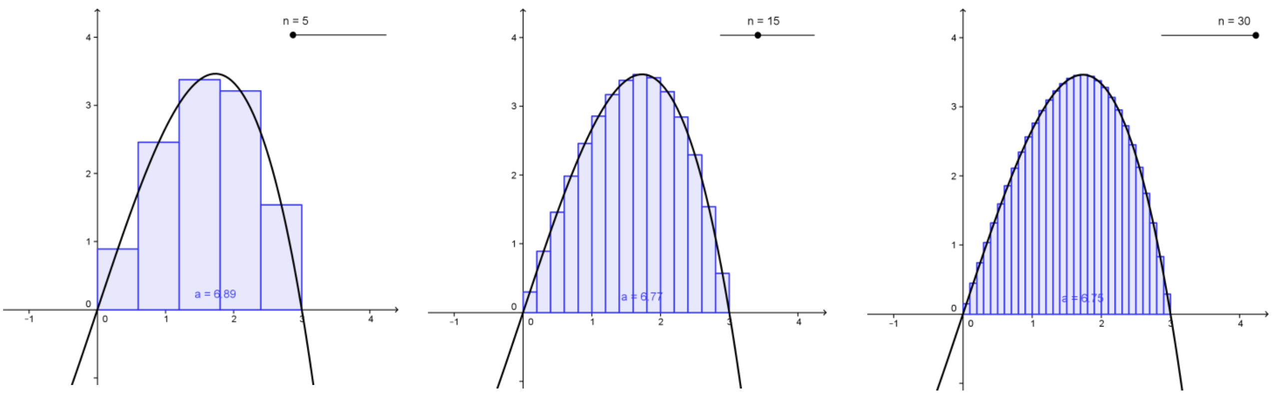


Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia continua e positiva in $[a, b]$. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n intervallini aventi la stessa ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Costruiamo quindi i rettangoli aventi per base Δx e per altezza $f(x_i)$ valore della funzione nel punto $x_i \in [a, b]$. Ciascun rettangolo avrà quindi area $A_i = \Delta x \cdot f(x_i)$. Sommando tutte le aree di questi rettangolini avremo:

$$\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) \dots + \Delta x \cdot f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i).$$

Con questa operazione abbiamo ottenuto un valore approssimato dell'area del trapezoide; è possibile dimostrare che il limite di questa somma quando n tende all'infinito è finito ed è indipendente dalla scelta dei punti x_i e rappresenta esattamente l'area del trapezoide individuato dalla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i) = area\ del\ trapezoide$$

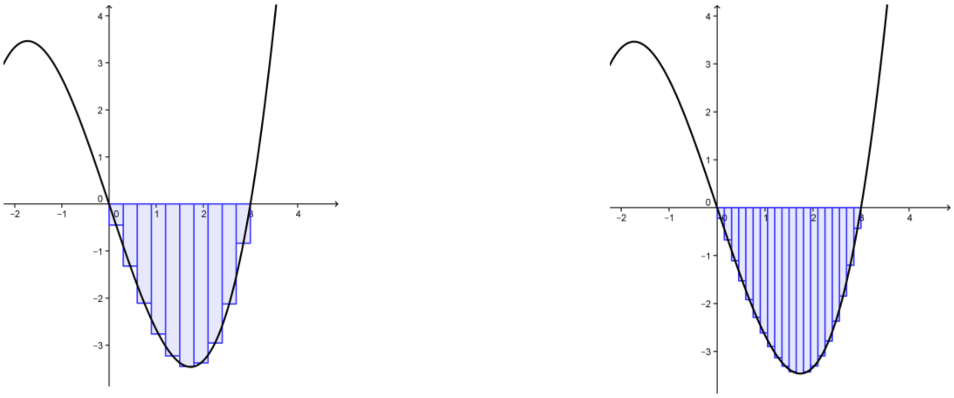


Questo limite viene chiamato di integrale definito della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ e si indica con il simbolo: $\int_a^b f(x)dx$ che si legge "integrale da a a b di $f(x)$ in dx".

Abbiamo inserito un nuovo e fondamentale tassello dell'analisi quello di integrale definito, che viene applicato a svariati concetti oltre al calcolo delle aree trova applicazioni in calcoli economici, nel calcolo di volumi, di lunghezze, del lavoro di forze, dei momenti, della velocità ecc.

OSSERVAZIONI

- ✓ Il procedimento visto sopra per definire l'area di un trapezoide può essere ripetuto anche nel caso in cui la funzione continua in $[a, b]$, non sia positiva in questo intervallo, in questo caso l'area del trapezoide sarà l'opposto del valore trovato.

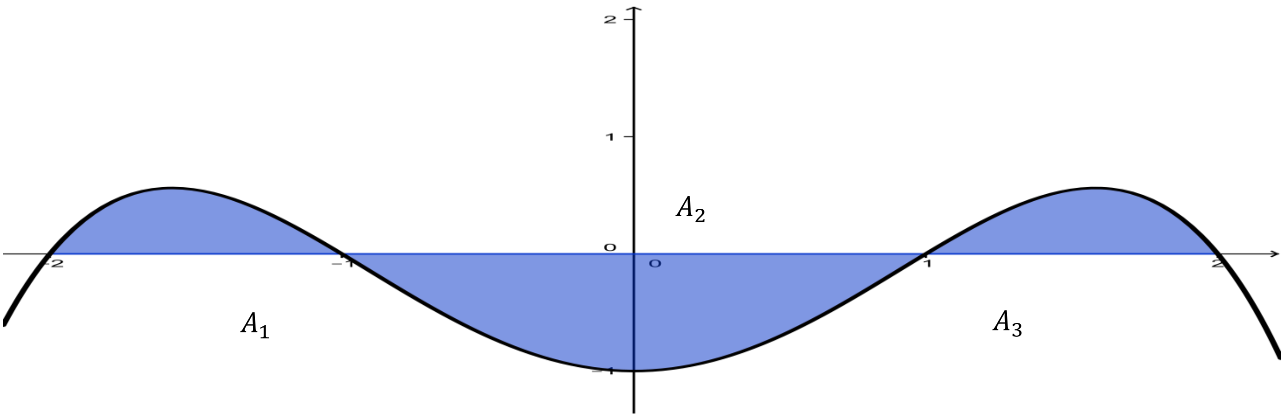


  Quindi al fine del calcolo dell'area è necessario analizzare preventivamente il segno di $f(x)$.

- ✓ Se $f(x)$ non ha segno costante in $[a, b]$ l'integrale definito rappresenta la differenza tra l'area della parte di trapezoide che sta al di sopra dell'asse delle ascisse e la parte che sta al di sotto di tale asse.

In tutti i casi avremo: $area(S) = \int_a^b |f(x)| dx$

Ad esempio consideriamo la figura seguente:



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x) = A_1 - A_2 + A_3$$

6. PROPRIETA' DELL'INTEGRALE DEFINITO

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$, in base alla definizione possiamo dedurre:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ dove $c \in [a, b]$
- $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx$
- $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_b^a f(x)dx$

7. LA FUNZIONE INTEGRALE

Siano dati la funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a, b]$ ed un punto, $x_0 \in [a, b]$ consideriamo l'integrale definito $\int_{x_0}^x f(t)dt$. Al variare di x l'integrale non è più un numero, ma una funzione perché il suo valore numerico dipende dalla scelta di x. Questa funzione prende il nome di funzione integrale:

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

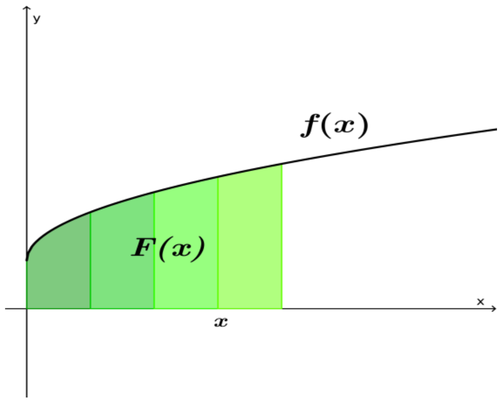
Esiste un legame tra $f(x)$ e la sua funzione integrale $F(x)$ che viene espresso nel teorema fondamentale del calcolo integrale.

Teorema di Torricelli-Barrow: se f è una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$, fissato $x_0 \in [a, b]$ la sua funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

relativa al punto x_0 è derivabile e la sua derivata in ogni punto di $[a, b]$ è uguale alla funzione f nello stesso punto cioè:

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.



Questo teorema è importante anche perché collega il concetto di integrale indefinito a quello di integrale definito. Ci dice che la funzione integrale F è una delle primitive della funzione f.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale è importante anche perché da esso possiamo ricavale la formula di Newton-Leibniz per il calcolo dell'integrale definito:

sia f una funzione continua in $[a, b]$ e h una sua primitiva allora si avrà

$$\int_a^b f(t)dt = [h(x)]_a^b = h(b) - h(a)$$

Cioè l'integrale definito fra a e b di una funzione continua $f(x)$ è la differenza fra i valori che la funzione f assume in tali punti.

8. IL CALCOLO DELLE AREE

AREA COMPRESA TRA CURVA E L'ASSE X

Abbiamo visto nel capitolo 5 se la funzione integranda $f(x) > 0$,

$$\int_a^b f(x)dx$$

rappresenta l'area della regione di piano delimitata dalla curva, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$.

Se invece la funzione integranda $f(x) < 0$

$$-\int_a^b f(x)dx$$

rappresenta l'area della regione di piano delimitata dalla curva, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$.

Se $f(x)$ cambia segno nell'intervallo $[a, b]$ per calcolare l'area compresa tra il suo grafico e l'asse x dobbiamo suddividere tale intervallo in intervalli più piccoli, in esso contenuti, in modo che in ciascuno di essi la funzione mantenga

sempre lo stesso segno. Calcoliamo quindi gli integrali in ciascun intervallo e sommiamo algebricamente.
Quindi il problema di determinare l'area della parte di piano compresa tra una curva e l'asse x in un determinato intervallo lo risolviamo con il calcolo di uno o più integrali definiti.

ESEMPIO

Calcoliamo l'area della regione compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x^3$ e l'asse x nell'intervallo $[-2,2]$.

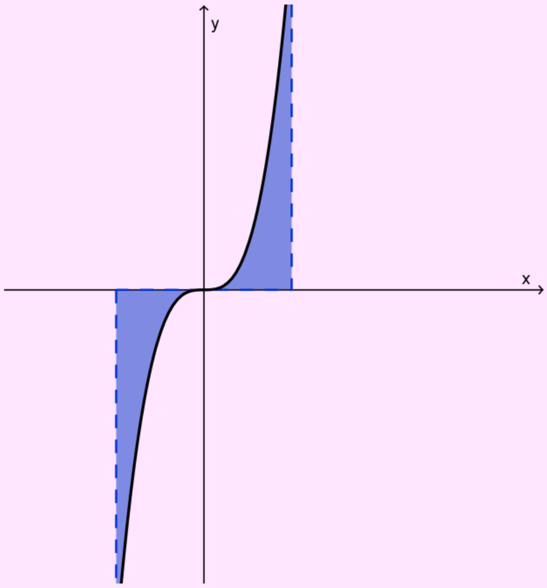
$$A = -\int_{-2}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{2} x^3\, dx$$

Risolviamo i due integrali:

$$-\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}$$

Applichiamo la formula di Newton-Leibniz:

$$+\frac{16}{4} + \frac{16}{4} = 8$$



AREA DELIMITATA TRA DUE CURVE

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, continue in un intervallo$[a, b]$ e tali che $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, allora l'area della parte di piano compresa tra i loro grafici e dalle rette $x = a$ e $x = b$ sarà:

$$S = \int_{a}^{b} f(x)dx - \int_{a}^{b} g(x)dx = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]\, dx$$

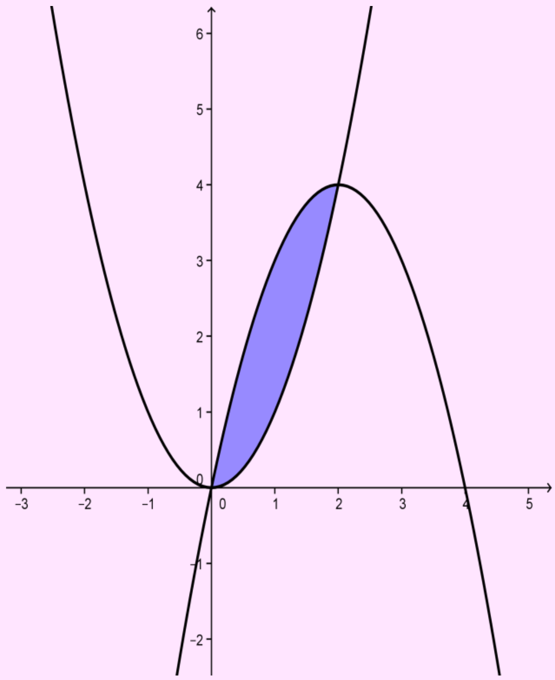
OSSERVAZIONI

- ✓ La formula si utilizza anche per determinare l'area della superficie racchiusa tra due curve f(x) e g(x) che si intersecano nei punti di ascissa a e b.
- ✓ La formula resta valida anche se una o entrambe le funzioni sono negative.

ESEMPIO

Calcoliamo l'area della regione compresa tra il grafico delle due funzioni $f(x) = x^2$ e $f(x) = -x^2 + 4x$ nell'intervallo $[0,2]$.

$$A = \int_0^2 (-x^2 + 4x)\, dx - \int_0^2 x^2 dx$$



Per le proprietà degli integrali definiti avremo:

$$\int_0^2 (-x^2 + 4x - x^2)\, dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\, dx$$

Risolviamo:

$$\left[\frac{-2x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2$$

Applichiamo la formula di Newton-Leibniz:

$$-\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}$$