CAPITOLO 2

LIMITI E CONTINUITA'

1. UN PO' DI STORIA

La parola "limite" è suggestiva, ha un significato intuitivo ma spesso nel linguaggio comune assume differenti significati. Parlando di un oggetto capita di asserire che questi è limitato, cioè che ha una forma finita o dei confini, oltre i quali probabilmente non è possibile andare, e forse non sarebbe neppure opportuno sconfinare al di là di essi. Seguendo questa interpretazione è importante comprendere quali siano questi limiti e che contorno definiscono. Nonostante assuma differenti significati, il concetto di limite in matematica è ben definito e parte fondamentale dell'analisi infinitesimale. La sua definizione fu enunciata nella forma da noi utilizzata, dal matematico tedesco Karl Weierstrass, ma tale concetto è molto più antico. Si ritrovano sue applicazioni per calcolare aree e volumi nella matematica greca, presso Eudosso ed Archimede, anche se in forma non esplicita (poiché basate su un passaggio al limite). Il limite è anche l'unico strumento per "lavorare" con gli infinitesimi e gli infiniti e oggi è il fondamento di tutto il calcolo differenziale e integrale, le cui applicazioni sono numerosissime, non solo in matematica e fisica, ma in tutte le scienze. I primi tentativi di continuare l'opera di Archimede si devono a diversi matematici come Fermat, Newton, Leibniz, e Cauchy. Fu Newton a esplicitare il concetto di infinitesimo: una grandezza infinitamente piccola" ma diversa da zero. Anche Leibniz tendeva ad affrontare la questione con la discussione sempre parlando di "quantità infinitamente piccole". Con ciò egli intendeva delle quantità che, per quanto non nulle non potevano essere ulteriormente diminuite. Come gli atomi della chimica , le sue quantità infinitamente piccole erano i mattoni, le unità indivisibili che costituivano la matematica, le cose più vicine allo zero che ci fossero. L'imprecisione di questa definizione la rese inaccettabile per i suoi contemporanei, e sollevò numerose discussioni tra i matematici. La comunità matematica, a poco a poco, prese coscienza del fatto che doveva occuparsi del problema. Paradossalmente si era arrivati a questa situazione, non perché il calcolo non funzionasse, ma perché funzionava troppo bene. Troviamo così una schiera di matematici, all'inizio dell'Ottocento, occupati a esaminare la questione dei fondamenti.

2. PERCHE' STUDIARE I LIMITI

Supponiamo di essere gli amministratori di una media impresa, che investe un'importante somma in denaro per la campagna pubblicitaria dei propri prodotti, ricavandone un buon profitto. In qualità di amministratori vogliamo essere in grado di poter controllare questo trend positivo, in modo che all'investimento in pubblicità faccia sempre seguito un profitto, così da mantenere il bilancio aziendale in attivo.

Vogliamo capire quindi se ad ogni aumento della spesa pubblicitaria può essere assicurato un profitto che aumenta sempre più o se esiste un livello oltre il quale questo non può più essere aumentato.

Supponiamo che dai dati in possesso dell'azienda è possibile costruire una funzione che descriva al meglio l'andamento costo pubblicità – profitto e che tale funzione sia, ad esempio, espressa dalla seguente relazione:

$$y = \frac{60x + 2}{2x + 1}$$

Se riportiamo in una tabella alcuni valori di x ed i corrispondenti valori di y, possiamo osservare che y, pur continuando a crescere all'aumentare di x, non oltrepassa il valore 30: si avvicina sempre più ad esso senza mai superarlo.

Dobbiamo dunque spiegare in modo oggettivo e con strumenti appropriati i due termini "sempre più", livello "oltre il quale", senza mai superarlo ed altri che troveremo nel seguente esempio.

Consideriamo la funzione

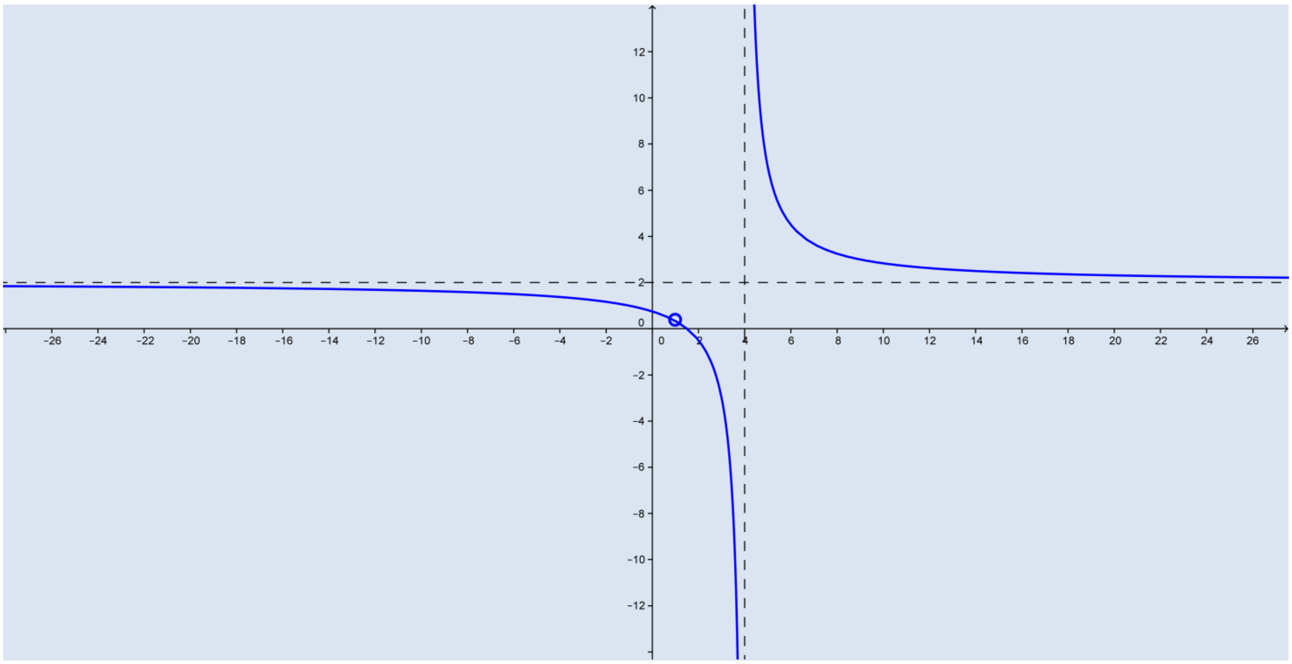
$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 4}$$

che esiste per ogni x reale tranne che per $x = 1$ e per $x = 4$ quindi il suo dominio sarà $D = (\infty - ,1) \cup (1,4) \cup (4 + \infty)$. Essa quindi è definita:

- nell'intorno di qualsiasi numero reale
- negli intorni di $x = 1$ e $x = 4$, ossia con tali punti esclusi
- negli intorni dell'infinito.

Ha quindi senso chiederci, in particolare per i punti in cui non è definita, quali valori $f(x)$ assuma in tali *intorni* e come essa vari *man mano che ci si avvicina sempre di più* a $x = 1$ o $x = 4$. Analizziamo il seguente grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 4}$$



Si può notare come nell'intorno di $x=4$ la funzione "schizzi via", nel senso che il suo grafico si allontana sempre più dall'asse x man mano che ci avviciniamo a $x = 4$: diremo che *la funzione tende all'infinito per* x *che tende a* 4.

Notiamo inoltre che *nell'intorno sinistro di* $x = 4$ la funzione assume valori negativi, mentre *nell'intorno destro* assume valori positivi. Possiamo allora precisare che $f(x)$ *tende a* $+\infty$ *per* x *che tende a* 4 *"da sinistra"*, mentre *tende a* $-\infty$ *per* x *che tende a* 4 *"da destra".*

Per quanto riguarda invece l'*intorno di* $x=1$, non si notano dal grafico irregolarità della funzione: questo perché, pur non essendo definita per $x=1$, per tutti gli altri valori, e quindi anche nell'intorno bucato di 1, $f(x)$ equivale alla frazione ottenuta semplificando il fattore comune $x-1$ tra numeratore e denominatore:

$f(x) = \frac{2x-3}{x-4}$ *se* $x \neq 1$.

Inoltre, si nota dal grafico che *allontanandoci dall'asse* y *i valori della funzione tendono ad avvicinarsi a* 2 *per* x *che aumenta indefinitamente*, da entrambe le direzioni: diremo che $f(x)$ *tende a* 2 *per* x *che tende all'infinito*.
Riportiamo in tabella i valori di $f(x)$ mentre si avvicina sia a valori esclusi dal dominio, sia a qualche altro numero appartenente l dominio.

x	-1	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	1
$f(x)$	1	0.7804878	0.7531172	0.75	0.7468672	0.7179487	0.3333333

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.3870968	0.3388704	0.3338887	Non Esiste	0.3327776	0.3277592	0.2758621

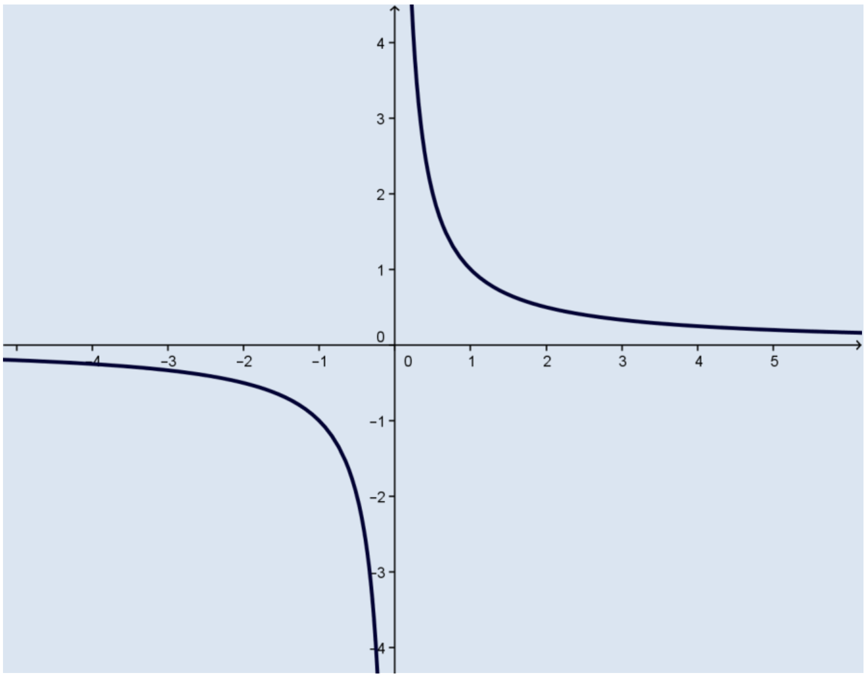
x	1.4	1.48	1.49	1.5	1.51	1.52	1.6
$f(x)$	0.0769231	0.0158730	0.0079681	0	-0.008032	-0.016129	-0.083333

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	-48	-798	-4998	Non Esiste	5002	502	52

x	5	10	50	100	500	1000	10000
$f(x)$	7	2.8333333	2.1086957	2.0520833	2.0100806	2.0050201	2.0005002

➨ Ora prova tu

Prendi il grafico della funzione $y = \frac{1}{x}$ e dopo averne determinato il dominio spiega cosa succede nei punti esclusi dal dominio e in $\pm\infty$, e costruisci le tabelle come nell'esempio precedente.



Entrambi gli esempi che abbiamo trattato mostrano l’esigenza di introdurre un nuovo concetto, quello di limite, che è uno dei più importanti dell’analisi matematica.

Questo argomento è di estrema importanza, ma non può essere considerato per niente facile. Le difficoltà di questo argomento riguardano sia gli studenti che devono apprendere che i docenti che devono insegnare. Infatti, come vedremo più avanti, spesso si fa molta confusione per quanto riguarda l’interpretazione verbale del concetto di limite, sia da parte dell’insegnante che dell’alunno.

Esiste prima di tutto un problema di linguaggio, ma anche un altro che scaturisce dal tentativo di rendere intuitiva ed accessibile la nozione di limite, problema che riguarda un po’ tutti gli aspetti della matematica.

3. GLI INTORNI

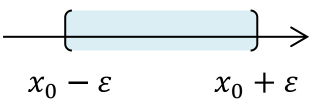
Con $\mathbb{R}^*$ indichiamo l’insieme ampliato dei numeri reali

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

Consideriamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$.

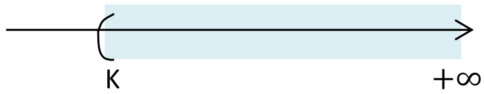
Si definisce **intorno circolare di** $\boldsymbol{x_0}$ **di raggio** $\boldsymbol{\varepsilon}$ l’intervallo

$I(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$



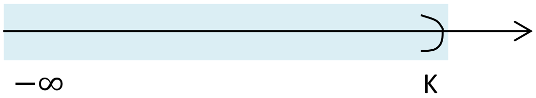
Si definisce **intorno di** $+\infty$ ogni intervallo del tipo

$I(+\infty) = (k, +\infty)$



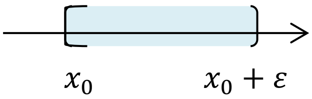
Si definisce **intorno di** $-\infty$ ogni intervallo del tipo

$I(-\infty) = (-\infty, k)$



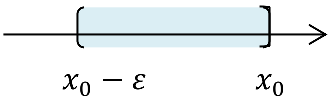
Si definisce **intorno destro di x_0 di raggio ε** l'intervallo del tipo

$I^+(x_0) = (x_0, x_0 + \varepsilon)$



Si definisce **intorno sinistro di x_0 di raggio ε** l'intervallo del tipo

$I^-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)$



Si può dedurre che $I(x_0)$ =

Dato un sottoinsieme A di numeri reali $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che

- Un punto $x_0 \in A$ è **punto interno** ad A se esiste un suo intorno tutto contenuto in A.
- Un **insieme** è **aperto** se tutti i suoi punti sono interni.
- Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un **punto esterno** ad A se esiste un suo intorno tutto contenuto nel complementare di A.
- Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un **punto di frontiera** per A se ogni intorno x_0 contiene punti di A e punti del complementare di A.
- Un **insieme** è **chiuso** se contiene tutti i suoi punti di frontiera.
- Un punto $x_0 \in A$ è un **punto isolato** di A se esiste un suo intorno che non contiene elementi di A diversi da x_0.
- Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^*$ è un **punto di accumulazione** per A se ogni suo intorno contiene infiniti elementi di A.

ESEMPI

1. Consideriamo l'insieme $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{1}{n}, n = 1,2,3, \dots\right\}$.

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots\dots\right\}$$

L'unico punto di accumulazione è 0, tutti gli altri punti dell'insieme sono isolati.

2. Consideriamo l'insieme $A = [2; +\infty)$.
Tutti i punti di questo insieme sono punti di accumulazione.

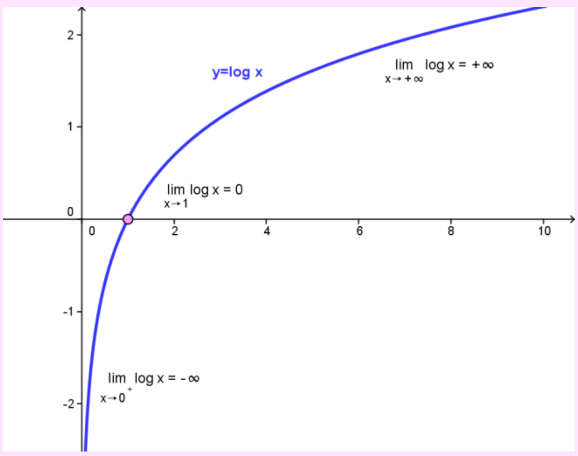
4. IL CONCETTO DI LIMITE

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione, quindi non è richiesto che $x_0 \in A$ e può essere uguale a $\pm\infty$.
Ciò che si vuole studiare è l'andamento dei valori assunti dalla funzione f quando la variabile indipendente x assume valori "sempre più vicini" ad x_0, senza necessariamente raggiungerlo; oppure l'andamento della funzione f quando la variabile indipendente x assume valori "sempre più grandi", cioè si allontana si allontana verso l'infinitamente grande.

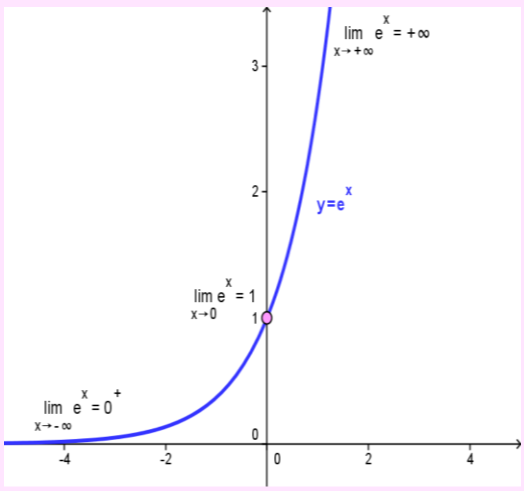
ESEMPI

1. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$
2. $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
3. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
4. $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$
5. Vediamo alcuni grafici

Limiti del logaritmo

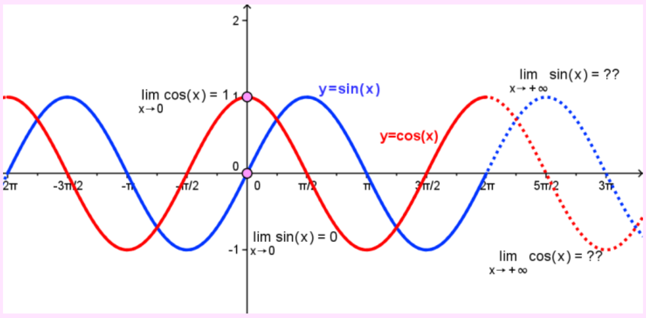


Limiti dell'esponenziale



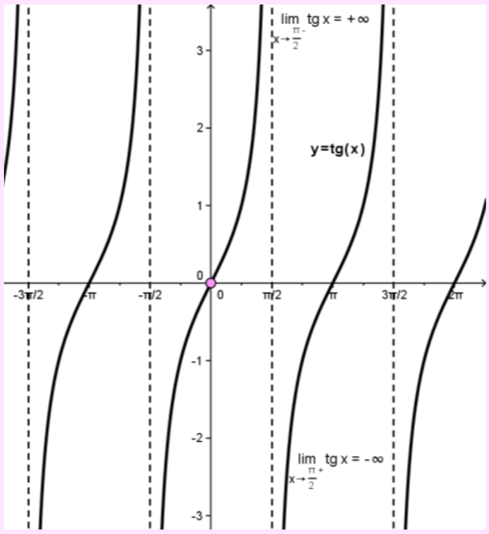
Limiti di $\sin x$ e $\cos x$

$\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ e $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$, essendo funzioni che oscillano periodicamente tra -1 e 1



Limiti di $\operatorname{tg} x$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{\pm}} \operatorname{tg} x = \mp\infty$$



Definizione generale di limite

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione.

Diciamo che $f(x)$ tende a $l \in \mathbb{R}^*$ per x che tende a x_0 $(x \to x_0)$ e scriviamo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Se per ogni intorno $U_y(l)$ esiste un intorno $V_x(x_0)$ tale che per ogni $x \in V_x(x_0)$ escluso al più x_0 $(x \neq x_0)$ $\Rightarrow$ $f(x) \in U_y(l)$

La definizione data mette in evidenza alcune aspetti molto importanti:

- Il punto x_0 non è necessariamente un punto che appartiene al dominio della funzione, è sufficiente che sia un punto di accumulazione.
- L’intorno $V_x(x_0)$ non lo scegliamo arbitrariamente, ma deve dipendere dalla scelta dell’intorno $U_y(l)$.
- La condizione $f(x) \in U_y(l)$ deve valere per qualsiasi intorno di l, non basta che si vera per solo per qualche intorno particolare.

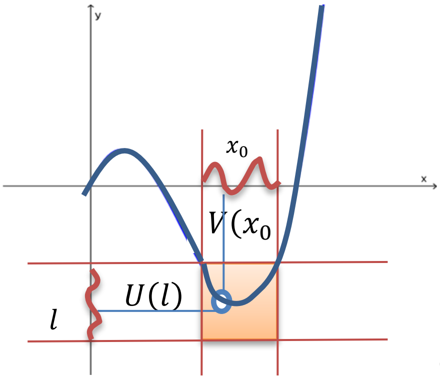
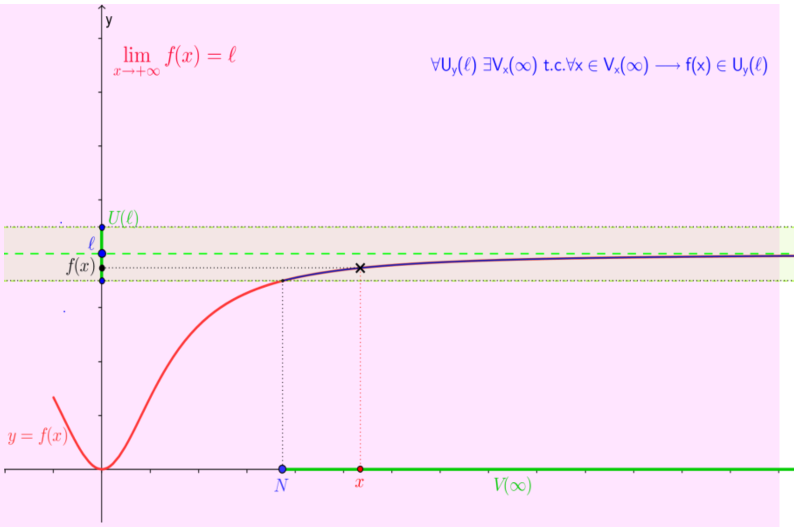


fig. 1

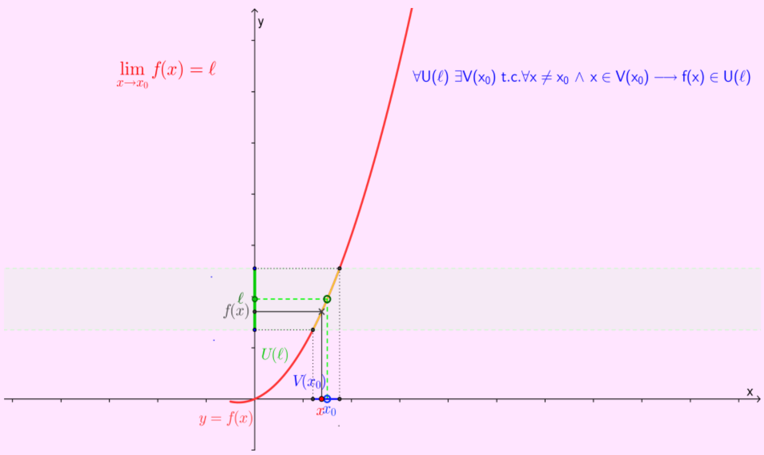
L'intorno $U_y(l)$ si prende sull'asse y ed è un segmento che contiene l, mentre l'intorno $V_x(x_0)$ si prende sull'asse x e dipende da come viene scelto $U_x(l)$ intorno sull' asse y.

Dalla definizione più generale, specificando in modo opportuno gli intorni di x_0 e l, possiamo dedurre tutte le definizioni particolari.

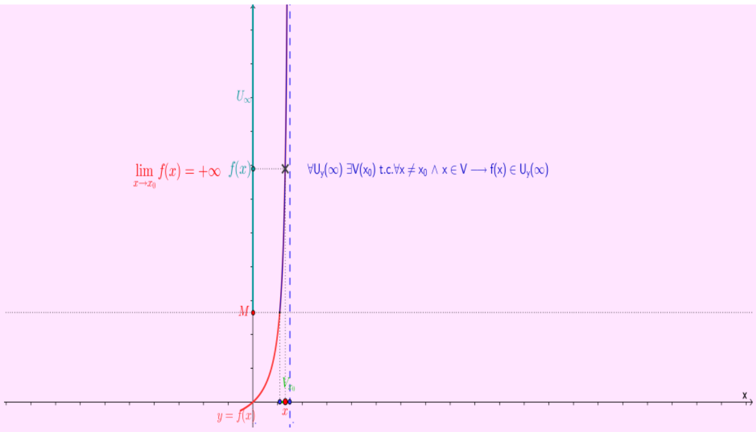
1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ significa che $\forall\, U_y(2)$ $\exists V_x(+\infty)$ tale che $\forall x \in V_x(+\infty) \Rightarrow f(x) \in U_y(2)$
   - In questo caso la retta $y = 2$ si chiama **asintoto orizzontale**



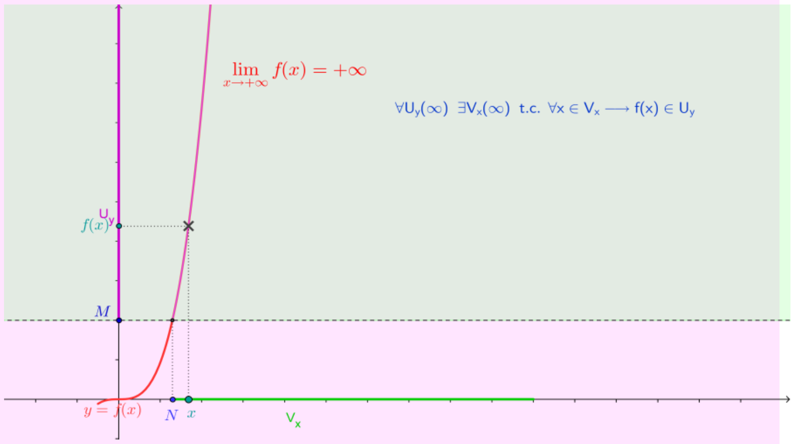
2. $\lim_{x\to3} f(x) = 4$ significa che $\forall\, U_y(4)$ $\exists V_x(3)$ tale che $\forall x \in V_x(3) \Rightarrow f(x) \in U_y(4)$



3. $\lim_{x\to5} f(x) = +\infty$ significa che $\forall\, U_y(+\infty)\ \exists V_x(5)$ tale che $\forall x \in V_x(5) \Rightarrow f(x) \in U_y(+\infty)$
   - In questo caso la retta $x = 5$ si chiama **asintoto verticale**



4. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ significa che $\forall\, U_y(+\infty)$ $\exists V_x(+\infty)$ tale che $\forall x \in V_x(+\infty) \Rightarrow f(x) \in U_y(+\infty)$



5. FUNZIONI CONVERGENTI, DIVERGENTI E INDETERMINATE

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $l \in \mathbb{R}$ si dice che la funzione $\boldsymbol{f}$ **converge a** $\boldsymbol{l}$ per x che tende a x_0.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ si dice che la funzione $\boldsymbol{f}$ **diverge a** $\pm\infty$ per x che tende a x_0.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *non esiste* si dice che la funzione $\boldsymbol{f}$ **è indeterminata** per x che tende a x_0.

ESEMPI

1. La funzione $f(x) = \frac{1}{|x-2|}$ diverge a $+\infty$ per $x \to 2$
2. La funzione $f(x) = x^3$ diverge a $+\infty$ per $x \to +\infty$
3. La funzione $f(x) = e^x$ converge a 0 per $x \to -\infty$

4. La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ converge a 0 per $x \to 0$

5. La funzione $f(x) = \cos x$ è indeterminata per $x \to +\infty$

6. LIMITI PER ECCESSO E PER DIFETTO

Se nella definizione di limite, data nel capitolo 4, sostituiamo all'intorno $U(l)$ l'intorno destro $U^+(l)$ otteniamo la nozione di limite per eccesso.

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+$$

Se nella definizione di limite sostituiamo all'intorno $U(l)$ l'intorno sinistro $U^-(l)$ otteniamo la nozione di limite per difetto.

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^-$$

ESEMPI

1. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0^+$

   $\forall\, U_y^+(0)\ \exists V_x(0)$ tale che $\forall x \in V_x(0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_y^+(0)$

2. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

   $\forall\, U_y^+(0)\ \exists V_x(-\infty)$ tale che $\forall x \in V_x(-\infty) \Rightarrow f(x) \in U_y^+(0)$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{x^2} = 0^-$

   $\forall\, U_y^-(0)\ \exists V_x(+\infty)$ tale che $\forall x \in V_x(+\infty) \Rightarrow f(x) \in U_y^-(0)$

7. LIMITI DA DESTRA E DA SINISTRA

Se nella definizione di limite, data nel capitolo 4, sostituiamo all'intorno $V(x_0)$ l'intorno destro $V^+(x_0)$ otteniamo la nozione di limite destro.

Scriveremo in questo caso:

$$\lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = l$$

Se nella definizione di limite sostituiamo all'intorno $V(x_0)$ l'intorno sinistro $V^-(x_0)$ otteniamo la nozione di limite destro.

Scriveremo in questo caso:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$$

ESEMPI

1. $\lim_{x\to 0^+} x^3 = 0^+$

   $\forall\, U_y^+(0)\ \exists V_x^+(0)$ tale che $\forall x \in V_x^+(0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_y^+(0)$

2. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$

   $\forall\, U_y(-\infty)\ \exists V_x^-(1)$ tale che $\forall x \in V_x^-(1) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_y(-\infty)$

3. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-3}{x} = +\infty$

   $\forall\, U_y(+\infty)\ \exists V_x^-(0)$ tale che $\forall x \in V_x^-(0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_y(+\infty)$

OSSERVAZIONE

Il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste se e solo se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

cioè se e solo se esistono e sono uguali il limite destro e sinistro.

8. IL CALCOLO DEI LIMITI

Calcolare un limite significa semplicemente sostituire alle x della funzione il valore a cui tende la x del limite.

ESEMPIO

1. Calcolare il seguente limite: $\lim\limits_{x\to -2}(3x^3 - 2x + 1)$

   Sostituendo si ottiene semplicemente

$$\lim_{x\to -2}(x^3 - 3x^2 + 1) = (-2)^3 - 3(-2)^2 + 1 = 5$$

Ovviamente non è sempre così semplice, se dovessimo sostituire i valori $+\infty$ e $-\infty$ come si svolgeranno le operazioni in questo caso? Per rispondere a questa domanda dobbiamo studiare le operazioni aritmetiche estese a $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup (-\infty, +\infty)$ e le proprietà delle operazioni sui limiti.

OPERAZIONI IN $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup (-\infty, +\infty)$

➡ **SOMMA**

$\forall x \in \mathbb{R}$ si ha

$+\infty + x = +\infty \qquad +\infty + \infty = +\infty$

$-\infty + x = -\infty \qquad -\infty - \infty = -\infty$

➡ **PRODOTTO**

$\pm\infty \cdot x = \pm\infty$ se $x \in (0, +\infty) \qquad \pm\infty \cdot x = \mp\infty$ se $x \in (-\infty, 0)$

$\pm\infty \cdot (+\infty) = \pm\infty \qquad \pm\infty \cdot (-\infty) = \mp\infty$

➡ **QUOZIENTE**

$\frac{1}{\pm\infty} = 0^{\pm} \qquad \frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$

➡ **POTENZA**

$(+\infty)^x = +\infty$ se $x \in (0, +\infty) \qquad (+\infty)^x = -\infty$ se $x \in (-\infty, 0)$

➡ **ESPONENZIALE**

$(a)^{+\infty} = +\infty \qquad (a)^{-\infty} = 0^+$ se $a \in (1, +\infty)$

$(a)^{+\infty} = 0^+ \qquad (a)^{-\infty} = +\infty$ se $a \in (0,1)$

➡ **CASI PARTICOLARI**

$(0^+)^{+\infty} = 0^+ \qquad (0^+)^{-\infty} = +\infty$

$(+\infty)^{+\infty} = 0^+ \qquad (+\infty)^{-\infty} = 0^+$

➡ **LOGARITMI**

$log_a(+\infty) = +\infty \qquad log_a\left(0^+\right) = -\infty$ se $x \in (1, +\infty)$

$log_a(+\infty) = -\infty \qquad log_a\left(0^+\right) = +\infty$ se $x \in (0,1)$

poiché $+\infty$ e $-\infty$ non vengono considerati numeri di conseguenza non valgono tutte le proprietà delle operazioni fra numeri, ad esempio:

➡ non vale la legge dell'opposto:

$+\infty + (-\infty)$ non sappiamo che valore ha

➡ non vale la legge di annullamento del prodotto:

da $x + \infty = +\infty$ non segue necessariamente che $x = 0$

OSSERVAZIONE

da queste osservazioni possiamo dedurre che non risultano definite le seguenti operazioni:

$$[+\infty-\infty] \qquad [0\cdot\pm\infty] \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad \left[\frac{0}{0}\right] \qquad [0^0] \qquad [1^{\pm\infty}] \qquad [\pm\infty^0]$$

Che vengono denominate forme di indecisione o forme indeterminate.

PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI SUI LIMITI

Consideriamo le funzioni $f\colon A\to\mathbb{R}$, $\quad g\colon A\to\mathbb{R}$

e i limiti $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$, $\quad \lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}^*$

possiamo considerare le seguenti proprietà:

a. $\lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = l + m$

b. $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$

c. $\dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$

d. $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n$ con $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

OSSERVAZIONE

Queste proprietà valgono solo se non abbiamo forme di indecisione

RICORDA!

$\dfrac{n}{0} = \infty \qquad \dfrac{n}{\infty} = 0$ i segno dipendono da quelli di n di 0 e di ∞.

9. FORME INDETERMINATE

FORMA INDETERMINATA $[+\infty-\infty]$

Per calcolare il limite di una **funzione polinomiale** che presenta la forma di indecisione $[+\infty-\infty]$ si procede nel seguente modo:

consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n)$$

Raccogliamo la x di grado maggiore

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n\left(a_0x^n + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right)$$

Poiché per $x\to\pm\infty$ i termini $\frac{a_1}{x}, \frac{a_2}{x^2}, \ldots \frac{a_n}{x^n}$ tendono a zero

Si avrà che

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n = \pm\infty$$

Il segno del limite dipenderà dai segni di a_0 e x^n e si troverà rispettandola regola dei segni.

ESEMPIO

1. Calcoliamo il seguente limite: $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3-2x+4)$

Sostituendo si ottiene la forma indeterminata

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^3-2x+4)=-\infty+\infty$$

Applicando il procedimento esposto sopra si avrà:

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^3-2x+4)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)=\lim_{x\to-\infty}3x^3=-\infty$$

Continuiamo con la forma indeterminata $[+\infty-\infty]$ e analizziamo ora il caso di una **funzione irrazionale** cioè di una funzione dove sono presenti radicali.

Per risolvere queste forme di indeterminazione si applicano i procedimenti di razionalizzazione del numeratore moltiplicando e dividendo per opportuni fattori razionalizzanti.

Vediamo come si procede con un esempio:

ESEMPIO

1. Consideriamo il seguente limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)$

Sostituendo si ottiene la forma indeterminata

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)=+\infty-\infty$$

Per risolvere la forma di indeterminazione razionalizziamo moltiplicando e dividendo la funzione per la somma dei due radicali:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}$$

Svolgendo i calcoli applicando il prodotto notevole

$(a-b)(a+b)=(a^2-b^2)$ otteniamo :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3-x-1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}$$

Sostituendo il valore a cui tende x avremo che :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}=\frac{2}{+\infty+\infty}=0$$

FORMA INDETERMINATA $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$ DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Per calcolare il limite di una **razionale fratta** che presenta la forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ si procede nel seguente modo:

consideriamo il seguente limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_m}$$

Raccogliamo la x di grado maggiore sia a numeratore che a denominatore:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots+\frac{b_m}{x^m}\right)}$$

Poiché per $x\to\pm\infty$ sia i termini $\frac{a_1}{x},\frac{a_2}{x^2},\dots\frac{a_n}{x^n}$, che i termini $\frac{b_1}{x},\frac{b_2}{x^2},\dots,\frac{b_m}{x^m}$ tendono a zero, possiamo dire che

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}$$

Vediamo alcuni esempi:

ESEMPI

1. Calcoliamo il seguente limite: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2}{x^2-3x+1}$

   Sostituendo si ottiene la forma indeterminata:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2}{x^2-3x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

   Procediamo quindi raccogliendo a fattor comune la potenza di x che ha l'esponente maggiore sia al numeratore che al denominatore:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\boxed{\frac{2}{x^3}}\right)}{1\boxed{-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

   Tendono a zero

   Sostituendo alle x della funzione $+\infty$, e considerando che i termini $\frac{2}{x^3},\frac{3}{x},\frac{1}{x^2}$ dopo tale sostituzione tendono a zero si avrà:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x^3}\right)}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{+\infty\left(1-\frac{2}{+\infty}\right)}{1-\frac{3}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}}=+\infty$$

Quindi $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2}{x^2-3x+1}=+\infty$

2. Calcoliamo il seguente limite: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{x^4-5}$

Sostituendo si ottiene la forma indeterminata:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{x^4-5}=\frac{\infty}{\infty}$$

Procediamo quindi raccogliendo a fattor comune x^2 a numeratore e x^4 a denominatore

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^4\left(1-\frac{5}{x^4}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{x^2\left(1-\frac{5}{x^4}\right)}$$

Sostituendo alle x della funzione $-\infty$, si avrà:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{x^2\left(1-\frac{5}{x^4}\right)}=\frac{1-\frac{2}{-\infty}}{+\infty\left(1-\frac{5}{-\infty}\right)}=0$$

Quindi $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{x^4-5}=0$

3. Calcoliamo il seguente limite: $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-5x+1}{x^4+3x}$

Sostituendo si ottiene la forma indeterminata:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-5x+1}{x^4+3x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Procediamo quindi raccogliendo a fattor comune x^2 a numeratore e x^4 a denominatore

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(2-\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{3}{x^3}}$$

Sostituendo alle x della funzione $-\infty$ otteniamo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{3}{x^3}}=\frac{2-\frac{5}{-\infty}+\frac{1}{+\infty}}{1+\frac{3}{-\infty}}=2$$

Quindi $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-5x+1}{x^4+3x}=2$

Da questi esempi possiamo dedurre la seguente regola:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_m}=\pm\infty \quad \text{se } n>m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_m}=0 \quad \text{se } n<m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_m}=\frac{a_0}{b_0} \quad \text{se } n=m$$

FORMA INDETERMINATA $\left[\frac{0}{0}\right]$

Per calcolare il limite di una **razionale fratta** che presenta la forma di indecisione $\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]$ dobbiamo ricordarci di tutte le scomposizioni in fattori studiate in precedenza.

Vediamo alcuni esempi:

ESEMPI

1. Calcoliamo il seguente limite: $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$

Sostituendo si ottiene la forma indeterminata:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}$$

Procediamo quindi scomponendo in fattori sia il numeratore che il denominatore :

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}$$

Dove $x^2-4=(x-2)(x+2)$ è stato scomposto utilizzando la regola della differenza di quadrati, mentre

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ è stato scomposto utilizzando la regola del trinomio particolare.

Semplificando si avrà:

$\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+1}$

Sostituendo alle x della funzione il valore 2 si avrà:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

Quindi $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{4}{3}$

2. Calcoliamo il seguente limite: $lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{2x^2-9x+9}$

Sostituendo si ottiene la forma indeterminata:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{2x^2-9x+9} = \frac{0}{0}$$

Procediamo quindi scomponendo in fattori sia il numeratore che il denominatore :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{2x^2-9x+9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(2x-3)}$$

Dove $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ è stato scomposto utilizzando la regola della differenza di quadrati, mentre

$2x^2 - 9x + 9 = (x-3)(2x-3)$ è stato scomposto utilizzando la regola della scomposizione del trinomio di secondo grado, cioè il trinomio

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Dove x_1 e x_2 si calcolano usando la formula delle equazioni di secondo grado $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Nel nostro caso $x_{1,2} = \frac{9\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{9\pm 3}{4}$ da cui si ricava $x_1 = 3$ e $x_2 = \frac{3}{2}$

Semplificando si avrà:

$lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(2x-3)} = lim_{x\to 3} \frac{x+3}{2x-3}$

Sostituendo alle x della funzione il valore 2 si avrà:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{2x-3} = \frac{3+3}{6-3} = \frac{6}{3} = 2$$

Quindi $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{2x^2-9x+9} = 2$

In modo equivalente possiamo risolvere i limiti di **funzioni** che a numeratore o a denominatore non hanno polinomi, ma espressioni **con radicali** vediamo alcuni esempi:

ESEMPI

1. Calcoliamo il seguente limite: $\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{x-3}$

Sostituendo si ottiene la forma indeterminata:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{x-3} = \frac{0}{0}$$

Procediamo quindi scomponendo in fattori il denominatore utilizzando le proprietà dei radicali:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-3}}$$

Dove $x-3 = \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-3}$ è stato scomposto utilizzando le operazioni dei radicali $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

Semplificando si avrà:

$\lim_{x \to 3^+} \frac{\cancel{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{x-3} \cdot \cancel{\sqrt{x-3}}} = \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{\cdot\sqrt{x-3}}$

Sostituendo alle x della funzione il valore 3si avrà:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{\sqrt{x-3}} = \frac{1}{\sqrt{0}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Quindi $\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-9} = +\infty$

2. Calcoliamo il seguente limite: $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

Sostituendo si ottiene la forma indeterminata:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \frac{0}{0}$$

Procediamo quindi scomponendo in fattori il denominatore :

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

Dove $x-2 = (\sqrt{x}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{2})$ è stato scomposto utilizzando la regola della differenza di quadrati, mentre

Semplificando si avrà:

$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{2}}}{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{2})} \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$

Sostituendo alle x della funzione il valore 2 si avrà:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Razionalizzando si avrà $\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Quindi $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

FORMA INDETERMINATA $[0 \cdot \infty]$ DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Questo caso si presenta quando calcoliamo il limite del prodotto di due funzioni una delle quali tende a 0 e l'altra a ∞.

In quasi i tutti i casi questa forma indeterminata si risolve semplificando l'espressione o riscrivendola in un'altra forma.

Vediamo alcuni esempi:

ESEMPI

1. Calcoliamo il seguente limite: $\lim_{x \to -2} \left[\left(\frac{x+10}{4} - 2\right) \cdot \frac{x-5}{x+2}\right]$

Sostituendo si ottiene la forma indeterminata:

$$\lim_{x \to -2} \left[\left(\frac{x+10}{4} - 2\right) \cdot \frac{x-5}{x+2}\right] = 0 \cdot \infty$$

Perché $\lim_{x \to -2} \frac{x+10}{4} - 2 = 0$ e $\lim_{x \to -2} \frac{x-5}{x+2} = \infty$

Per eliminare l'indeterminazione svolgiamo i calcoli all'interno delle parentesi ed otteniam0:

$\lim_{x \to -2} \left[\left(\frac{x+10}{4} - 2\right) \cdot \frac{x-5}{x+2}\right] = \lim_{x \to -2} \left[\frac{x+10-8}{4} \cdot \frac{x-5}{x+2}\right] = \lim_{x \to -2} \left[\frac{\cancel{x+2}}{4} \cdot \frac{x-5}{\cancel{x+2}}\right]$

Semplificando e sostituendo alle x della funzione il valore 2 si ottiene:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x-5}{4} = \frac{-2-5}{4} = \frac{-7}{4}$$

Quindi $\lim_{x\to -2}\left[\left(\frac{x+10}{4}-2\right)\cdot\frac{x-5}{x+2}\right] = -\frac{7}{4}$

2. Calcoliamo il seguente limite: $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x-4}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)$

Sostituendo si ottiene la forma indeterminata:

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x-4}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = 0\cdot\infty$$

Procediamo quindi portando fuori dal segno di radice i possibili fattori :

$$\lim_{x\to +\infty}|x|\cdot\sqrt{\frac{1}{x-4}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)$$

Poiché $x\to +\infty$ possiamo trascurare il modulo si avrà:

$\lim_{x\to +\infty}\cancel{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x-4}}\cdot\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)$

Semplificando e sostituendo otteniamo:

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{1}{x-4}} = \sqrt{\frac{1}{+\infty}} = 0^+$$

Quindi $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x-4}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = 0^+$

10. LIMITI DI FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Per calcolare i limiti delle funzioni esponenziali e logaritmiche possiamo utilizzare i loro grafici.

FUNZIONI ESPONENZIALI

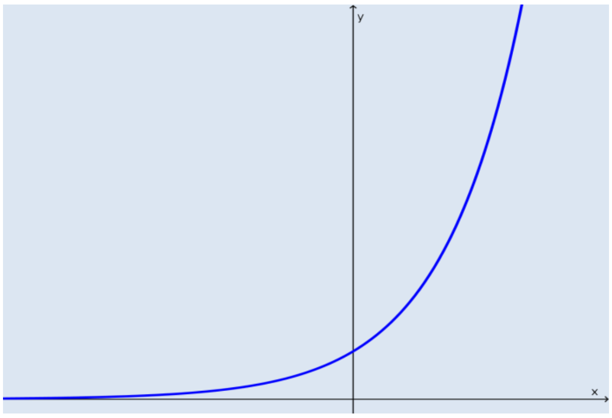
$$y = 2^x$$

$a > 0 \quad e \; a \neq 1$

Dal grafico possiamo dedurre i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

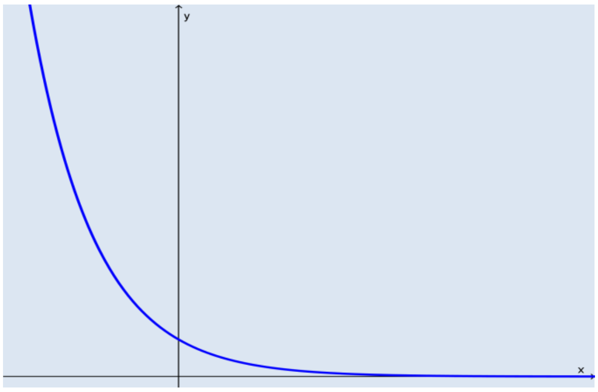


$y = a^x \quad 0 < x < 1$

Dal grafico possiamo dedurre i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+$$



Utilizzando i grafici e la proprietà

$$\lim_{f(x) \to x_0} a^{f(x)} = a^{\left[\lim_{f(x) \to x_0} f(x)\right]}$$

possiamo calcolare i limiti delle funzioni esponenziali, vediamo alcuni esempi:

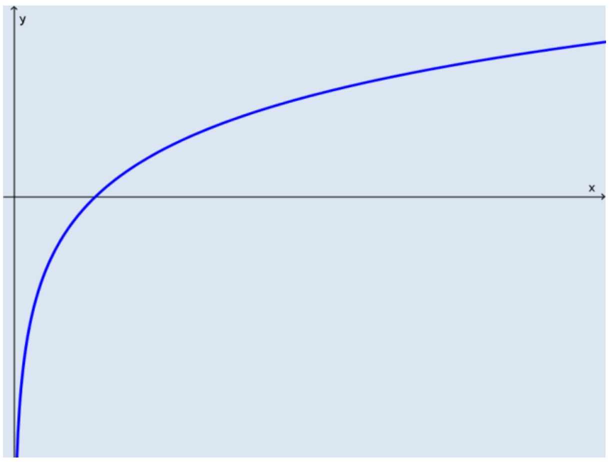
FUNZIONI LOGARITMICHE

$y = log_a x \quad a > 0 \quad e \; a \neq 1$

Dal grafico possiamo dedurre i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 0^+} log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = +\infty$$

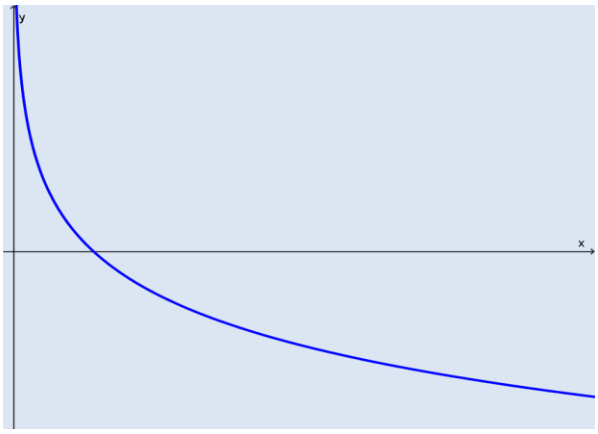


$y = log_a x \quad 0 < x < 1$

Dal grafico possiamo dedurre i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 0^+} log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = -\infty$$



Utilizzando i grafici e la proprietà

$$\boldsymbol{\lim_{f(x) \to x_0} log_a f(x) = log_a \left[\lim_{f(x) \to x_0} f(x) \right]}$$

possiamo calcolare i limiti delle funzioni logaritmiche, vediamo alcuni esempi:

11. LIMITI DI FUNZIONI DEL TIPO $f(x)^{g(x)}$

Le funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$ con $f(x) > 0$ portano alle forme indeterminate del tipo $[\mathbf{0^0}]$ $[\mathbf{1}^\infty]$ $[\infty^\mathbf{0}]$.

Per calcolare i limiti di funzioni queste funzioni dobbiamo utilizzare la seguente strategia $f(x)^{g(x)} = e^{lnf(x)^{g(x)}} = e^{g(x)lnf(x)}$, cioè ci si riconduce al calcolo del limite della funzione $g(x)lnf(x)$.

Vediamo un esempio:

ESEMPIO

1. Calcoliamo il seguente limite: $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{lnx}}$

   Sostituendo si ottiene la forma indeterminata:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{lnx}} = 0^{\frac{1}{-\infty}} = 0^0$$

   Trasformiamo il limite:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{lnx}}}$$

   Applicando la proprietà dei logaritmi $\log_a x^n = n \log_a x$

   Si ottiene $\lim_{x \to 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{lnx}}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{\cancel{lnx}} \cancel{\ln x}}$

   Semplificando si avrà: $\lim_{x \to 0^+} e^1 = e$

12. LIMITI NOTEVOLI

Con *limiti notevoli* si intendono quei limiti che si presentano in forma indeterminata, ma di cui conosciamo il valore (perché dimostrato), che servono da supporto nella risoluzione di altri limiti.

Di seguito sono inserite delle tabelle con i casi più utilizzati.

Quando risolviamo un limite, dobbiamo sempre far riferimento a questa tabella, e cercare di ricondurre le varie forme indeterminate a questi *limiti notevoli* mediante operazioni di *somma e sottrazione* oppure di *moltiplicazione e divisione*

LIMITI NOTEVOLI PER $x \to +\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$	$\lim_{f(x)\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$

ESEMPIO

Consideriamo il seguente limite : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

Cerchiamo di riscrivere il limite in modo che abbia la stessa forma del limite notevole della tabella, cioè in modo che compaia 1 nel numeratore della frazione:

quindi riscriviamo il limite: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{x}$

questa scrittura è equivalente a quella di partenza perché $\frac{1}{\frac{x}{2}}=1\cdot\frac{2}{x}=\frac{2}{x}$.

Ora dobbiamo trasformare l'esponente in modo che diventi uguale al denominatore della frazione, per questo moltiplichiamo e dividiamo l'esponente per 2 si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}$$

la funzione nella parentesi quadra corrisponde proprio al limite notevole che compare nelle tabella a destra, quindi il suo valore è e

in generale il limite dato avrà come risultato e^2

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}}}_{e}\right]^2 = e^2$$

LIMITI NOTEVOLI PER $x \to 0$

$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e \quad con\, a>0, a\neq 1$ $\lim_{x\to0}\frac{ln(x+1)}{x} = ln\, e = 1$	$\lim_{f(x)\to0}\frac{\log_a(f(x)+1)}{f(x)} = \log_a e$ $\lim_{f(x)\to0}\frac{ln(f(x)+1)}{f(x)} = ln\, e = 1$
$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = ln\, a \quad con\, a>0$ $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = ln\, e = 1$	$\lim_{f(x)\to0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)} = ln\, a \quad con\, a>0$ $\lim_{f(x)\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = ln\, e = 1$
$\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^k-1}{x} = k$	$\lim_{f(x)\to0}\frac{(f(x)+1)^k-1}{f(x)} = k$
$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e$	$\lim_{f(x)\to0}(1+f(x))^{1/f(x)} = e$
$\lim_{x\to0}\frac{sen\, x}{x} = 1$	$\lim_{f(x)\to0}\frac{sen f(x)}{f(x)} = 1$

ESEMPI

1. Consideriamo il seguente limite : $\lim_{x\to0}\frac{ln(3x+1)}{x}$

Cerchiamo di riscrivere il limite in modo che abbia la stessa forma del limite notevole della tabella, cioè in modo che nel denominatore la variabile x sia moltiplicata per il coefficiente 3.

Per questo moltiplichiamo e dividiamo 3:

$$\lim_{x\to0}\frac{3}{3}\frac{ln(3x+1)}{x} = \lim_{x\to0}3\frac{ln(3x+1)}{3x}$$

la frazione corrisponde proprio al primo limite notevole che compare nelle tabella della colonna destra, quindi il suo valore è 1

in generale il limite data avrà come risultato 3

$$\lim_{x\to0}3\underbrace{\boxed{\frac{ln(3x+1)}{3x}}}_{1} = 3\cdot1 = 3$$

2. Consideriamo il seguente limite : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2}$

Cerchiamo di riscrivere il limite in modo che abbia la stessa forma del limite notevole della tabella:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x\cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{e^x-1}{x}}}_{1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

13. INFINITESIMI , INFINITI E LORO CONFRONTO

In questo capitolo introdurremo due concetti molto utili nelle applicazioni e nel calcolo dei limiti, precisamente quelli di infinitesimo e di infinito.

INFINITESIMI

Si dice che una funzione $f(x)$ è un infinitesimo per $x \to x_0$ quando

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

ESEMPIO

Ad esempio sono infinitesime le seguenti funzioni:

$y = x^2$ quando $x \to 0$

$y = \frac{x^2-9}{x}$ quando $x \to 3$

$y = \frac{1}{x^3}$ quando $x \to +\infty$

$y = e^x$ quando $x \to -\infty$

Diciamo che due o più funzioni sono **infinitesimi simultanei** se esse sono tutte infinitesime per x che tende allo stesso valore x_0.

ESEMPIO

Ad esempio sono infinitesimi simultanei le seguenti funzioni:

$y = x^2$ e $y = \sqrt[3]{x}$ quando $x \to 0$

$y = \frac{1}{x^3}$ e $y = e^x$ quando $x \to +\infty$

$y = e^x$ e $y = \frac{1}{x}$ quando $x \to -\infty$

Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ due infinitesimi simultanei, è interessante stabilire quale delle due tende più rapidamente zero, per stabilirlo studiamo il comportamento del loro rapporto.

Si possono presentare quattro casi:

- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ allora f è un infinitesimo di ordine superiore a g;
- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ allora f e g sono infinitesimi dello stesso ordine;
- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ allora f è un infinitesimo di ordine inferiore a g;
- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ $non\ esiste$ allora f e g non sono confrontabili.

ESEMPIO

Confrontiamo tra loro i seguenti infinitesimi

$y = x^2$ e $y = \sqrt[3]{x}$

Poiché $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \to 0} x^{\frac{5}{3}} = 0$

allora $y = x^2$ è un infinitesimo di ordine superiore risetto a $y = \sqrt[3]{x}$.

INFINITI

Si dice che una funzione $f(x)$ è un infinito per $x \to x_0$ quando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

ESEMPIO

Ad esempio sono infinite le seguenti funzioni:

$y = x^2$ quando $x \to +\infty$

$y = lnx$ quando $x \to 0^+$

$y = \frac{1}{x^3}$ quando $x \to 0$

$y = e^x$ quando $x \to +\infty$

Diciamo che due o più funzioni sono **infiniti simultanei** se esse sono tutte infinite per x che tende allo stesso valore x_0.

ESEMPIO

Ad esempio sono infiniti simultanei le seguenti funzioni:

$y = x^2$ e $y = \sqrt[3]{x}$ quando $x \to +\infty$

$y = \frac{1}{x^3}$ e $y = lnx$ quando $x \to 0^+$

$y = \frac{1}{e^x}$ e $y = x$ quando $x \to -\infty$

Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ due infiniti simultanei, possiamo stabilire quale delle due tende più rapidamente a infinito studiando il comportamento del loro rapporto.

Si possono presentare quattro casi:

- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ allora f è un infinito di ordine inferiore a g;
- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ allora f e g sono infiniti dello stesso ordine;
- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ allora f è un infinitesimo di ordine superiore a g;
- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *non esiste* allora f e g non sono confrontabili.

ESEMPIO

Confrontiamo tra loro i seguenti infiniti

$y = x^3$ e $y = \sqrt[4]{x^3}$

Poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^{\frac{3}{4}}} = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

quindi $y = x^2$ è un infinito di ordine superiore risetto a $y = \sqrt[3]{x}$.

GERARCHIA DEGLI INFINITI

A volte per il calcolo di alcuni limiti che si presentano sotto forma indeterminata, ma che non sono risolvibili con i metodi studiati nei capitoli precedenti, è utile stabilire una gerarchia fra infiniti che possiamo dedurre tramite un confronto grafico.

Si verifica che per $x \to +\infty$, $\forall a > 1 \wedge \forall b > 0$

La funzione esponenziale di base maggiore di 1 è un infinito di ordine superiore rispetto a qualsiasi funzione potenza con esponente positivo, cioè:

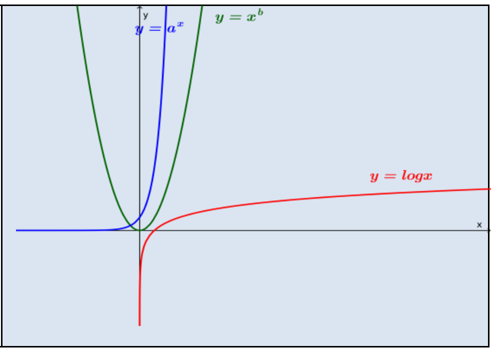
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty$$

La funzione potenza con esponente positivo è un infinito di ordine superiore rispetto alla funzione logaritmica con base maggiore di 1, cioè:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{\log_a x} = +\infty$$

Quindi in definitiva avremo:

a^x *infinito superiore a* x^b *infinito superiore a* $\log_a x$



ESEMPIO

Calcoliamo il seguente limite utilizzando il confronto fra infiniti: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{4^x}$

Poiché 4^x è un infinito di ordine superiore e trovandosi a denominatore per il confronto fra infiniti possiamo concludere che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{4^x}$=0.

14. FUNZIONI CONTINUE

Sia data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, essa viene definita **continua in un punto x_0,** appartenente la suo dominio se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) l \in \mathbb{R}$$

Per verificare quindi se una funzione risulta continua in un punto x_0 devono verificarsi le seguenti condizioni:

a. $f(x)$ è definita in x_0, cioè esiste in $f(x_0)$
b. Esiste finito il $\lim_{x\to x_0} f(x)$
c. $f(x_0)$ deve coincidere con il valore del limite, cioè $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

ESEMPIO

Stabilire se la seguente funzione è continua in $x = 2$: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

a. Calcoliamo il valore della funzione nel punto $x = 2$

$f(1) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3$

b. Calcoliamo il limite di $f(x)$ quando $x \to 2$

$\lim_{x\to 2} x^2 - 2x - 3 = 2$

c. Confrontiamo i due valori che risultano uguali.

Quindi la funzione è continua in $x = 2$

A volte pur essendo possibile calcolare $f(x_0)$ non è però possibile calcolare $\lim_{x\to x_0} f(x)$, ma può darsi che si possa calcolare il limite in un intorno destro oppure in un intorno sinistro. Se consideriamo solo un intorno destro o sinistro si avranno le seguenti definizioni:

Una funzione $f(x)$ è continua a destra in x_0 se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

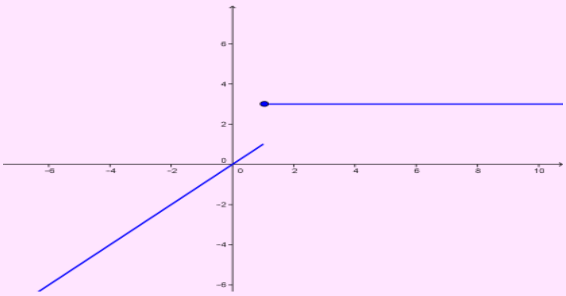
Una funzione $f(x)$ è continua a sinistra in x_0 se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Da queste considerazioni possiamo dire che una **funzione** è **continua** se:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = l \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO

La funzione $f(x) = \begin{cases} x & se \quad x < 1 \\ 3 & se \quad x \geq 1 \end{cases}$



È una funzione continua a destra in $x = 1$

*Una **funzione** $f: A \to \mathbb{R}$ si definisce **continua in un intervallo** se risulta continua in tutti i punti di tale intervallo.*

OSSERVAZIONI

- Per le funzioni continue il calcolo del limite per x che tende a x_0 coincide con il calcolo del valore di $f(x_0)$.
- Le funzioni elementari sono continue nel loro dominio.

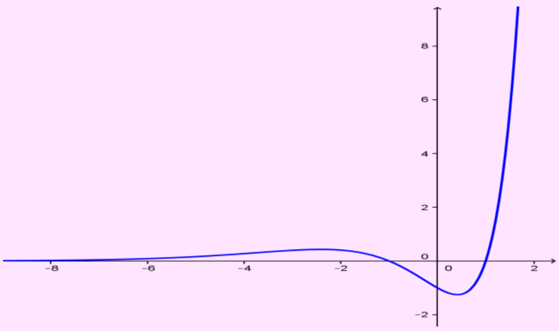
- Data la funzione composta $y = f(g(x))$ se g è continua in x_0 e f è continua nel punto $g(x_0)$ allora $f(g(x))$ è continua in x_0.
- Se f e g sono due funzioni continue in x_0 allora saranno continue in x_0 anche:
  - la somma algebrica di due funzioni continue $f(x) \pm g(x)$
  - il prodotto di due funzioni continue $f(x) \cdot g(x)$
  - il quoziente di due funzioni continue $\frac{f(x)}{g(x)}$ se $g(x_0) \neq 0$

ESEMPIO

Consideriamo le funzioni continue

$f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = e^x$

Verifichiamo graficamente, ad esempio che il loro prodotto è ancora una funzione continua



15. FUNZIONI DISCONTINUE

Abbiamo visto che per una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ la condizione di continuità in un punto x_0 è

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = l \in \mathbb{R}$$

equivalente a richiedere che i limiti destro e sinistro:

- Esistano
- Siano finiti
- Siano uguali tra loro
- Siano uguali alla funzione in x_0 cioè

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = l \in \mathbb{R}$$

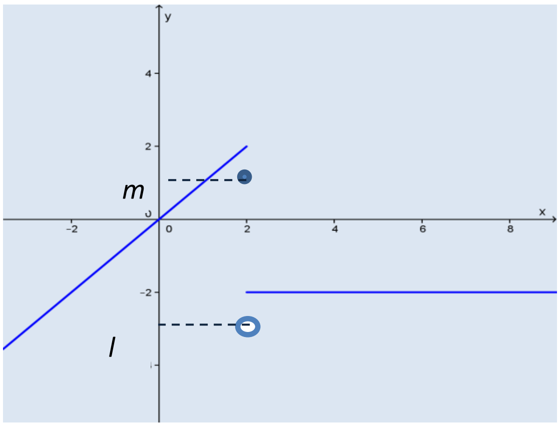
Se una di queste condizioni non si verifica la funzione risulta discontinua in x_0

Avremo quindi i seguenti tipi di discontinuità:

I. DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE

Si avrà una discontinuità di prima specie quando:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R} \qquad con \quad l \neq m$$

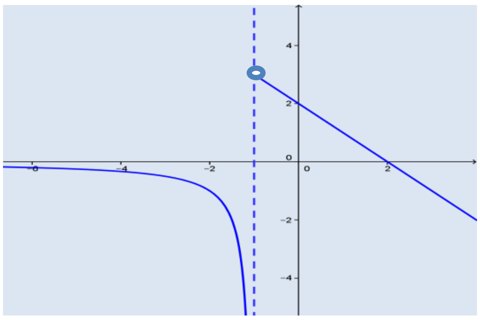


II. DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE

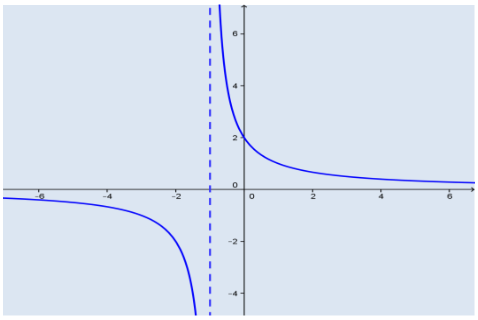
Si avrà una discontinuità di seconda specie quando, almeno uno dei due limiti destro o sinistro tende $\pm\infty$.

Possiamo distinguere i seguenti casi:

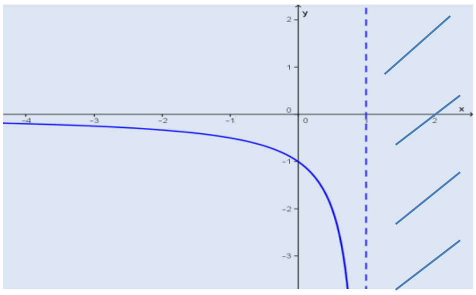
➡ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$



➡ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$



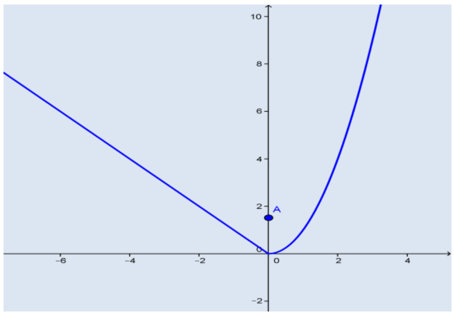
➡ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \nexists$



III. DISCONTINUITÀ DI TERZA SPECIE

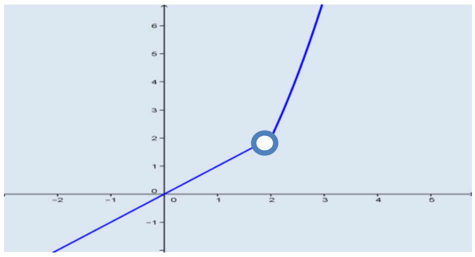
Si avrà una discontinuità di terza specie quando:

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $(x_0) \neq l$



OPPURE

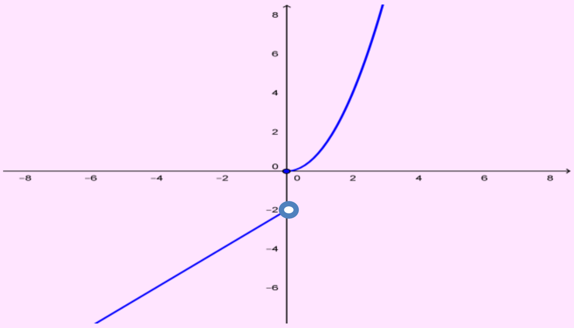
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $f(x_0) \nexists$



ESEMPI

1. Consideriamo la funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & se\ x < 0 \\ x^2 & se\ x \geq 0 \end{cases}$$



Vediamo se in $x = 0$ è discontinua ed eventualmente troviamo il tipo di discontinuità.

Calcoliamo il limite sinistro e destro della funzione:

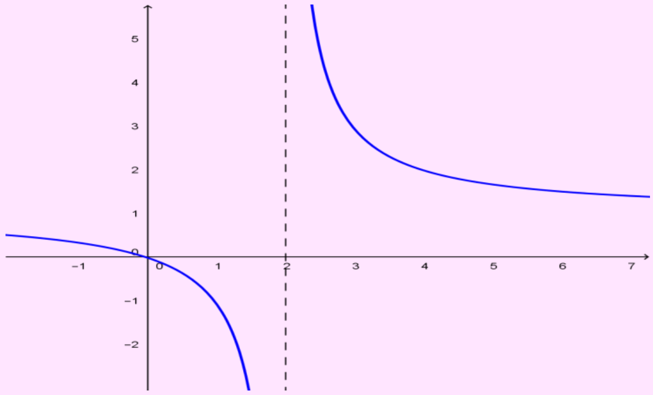
$\lim_{x \to x_0^-} x - 2 = -2$

$\lim_{x \to x_0^+} x^2 = 0$

I due limiti sono diversi ma finiti quindi avremo una discontinuità di *prima specie.*

2. Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$



Vediamo se in $x = 1$ è discontinua ed eventualmente troviamo il tipo di discontinuità.

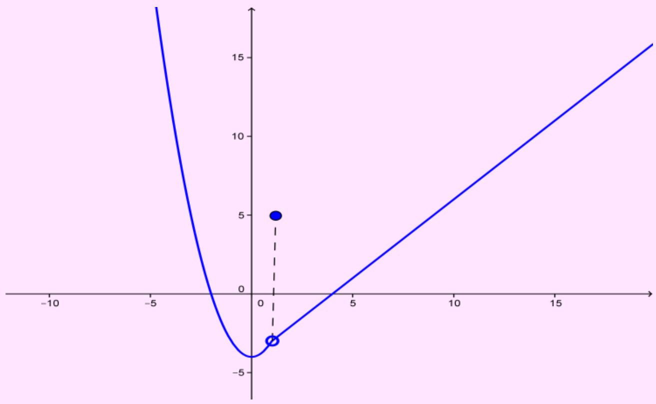
Calcoliamo il limite sinistro e destro della funzione:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty$$

I due limiti hanno un valore infinito quindi si avrà una discontinuità di seconda specie.

3. Consideriamo la funzione:

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & se\ x = 1 \\ 5 & se\ x \neq 1 \end{cases}$$



Vediamo se in $x = 1$ è discontinua ed eventualmente troviamo il tipo di discontinuità.

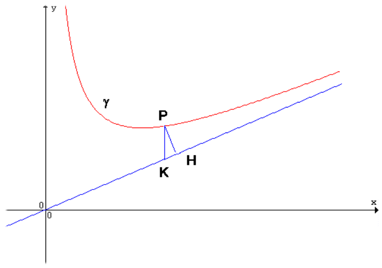
Calcoliamo il limite sinistro e destro della funzione:

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-4}{x+2} = 2$ ma $f(1) = 5$

I due limiti hanno lo stesso valore ma in x=1 la funzione ha un valore diverso dal limite quindi si avrà una discontinuità di terza specie.

16. ASINTOTI

L' **asintoto** di una funzione è una retta, tale che la distanza di tale retta dal grafico della funzione tende a zero quando un generico punto preso sul grafico della funzione va all'infinito.



Questa definizione ci dice che il grafico della funzione si avvicina sempre di più alla retta, ma in realtà non si toccheranno mai.

Si possono distinguere tre tipi di asintoti:

ASINTOTO ORIZZONTALE

Si ha un asintoto orizzontale quando: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ $\Rightarrow$ la retta $y = l$ rappresenta l'asintoto orizzontale.

ASINTOTO VERTICALE

Si ha un asintoto verticale quando: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ $\Rightarrow$ la retta $x = x_0$ rappresenta l'asintoto verticale.

ASINTOTO OBLIQUO

Si <u>potrebbe</u> avere asintoto obliquo quando: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ *(non è una condizione sufficiente per l'esistenza dell'asintoto obliquo).*

Se il grafico della funzione $y = f(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$, con $m \neq 0$, allora possiamo determinare m e q tramite i seguenti limiti:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

OSSERVAZIONI

- Un asintoto obliquo si può avere sia per $\boldsymbol{x} \to +\infty$ sia per $\boldsymbol{x} \to -\infty$ oppure in uno solo dei due casi.
- Se in $+\infty$ c'è l'asintoto orizzontale non potrà esserci quello obliquo e viceversa, analogamente se in $-\infty$ c'è l'asintoto orizzontale non potrà esserci quello obliquo, cioè i due asintoti orizzontale ed obliquo si escludono a vicenda.

- In una funzione razionale fratta, si può osservare che se il grado del numeratore supera di uno il grado del denominatore allora la funzione avrà sicuramente un asintoto obliquo.
- In una funzione razionale fratta, se i gradi del numeratore e denominatore sono uguali allora la funzione avrà sicuramente un asintoto orizzontale.
- In una funzione razionale fratta se il denominatore supera il grado del numeratore all'ora l'asse x sarà un asintoto orizzontale.

ESEMPI

1. Data la funzione $y = \frac{x^2-1}{x^2-2x}$, determiniamo le equazioni dei suoi asintoti verticali ed orizzontali.

   Prima di tutto dobbiamo calcolare il dominio della funzione, essendo razionale fratta dovremo porre denominatore diverso da zero; quindi da $x^2 - 2x \neq 0$ si ottiene $x \neq 2 \; e \; x \neq 0$

   quindi il dominio sarà: $D = (-\infty, 0) \cup (0,2) \cup (2, +\infty)$

   Per determinare gli asintoti verticali calcoliamo i limiti nei punti 0 e 2

   $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x^2-2x} = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x^2-2x} = \infty$

   Quindi le rette $x = 0$ e $x = 2$ sono asintoti verticali.

   Per determinare gli asintoti orizzontali calcoliamo i limiti:

   $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-1}{x^2-2x} = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2-2x} = 1$

   Quindi la retta $y = 1$ è un asintoto verticale

2. Data la funzione $y = \frac{x^2}{x+2}$, determiniamo, se esiste, l'asintoto obliquo

   Poiché $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2}{x+2} = \pm\infty$, la funzione può avere un asintoto obliquo,

   Calcoliamo m e q

   $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+2x} = 1$$

   $$q = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+2} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x}{x+2} = -2$$

   Quindi la retta $y = x - 2$ è un asintoto obliquo.

17. GRAFICO PROBABILE DI UNA FUNZIONE

A questo punto siamo in grado di determinare molte caratteristiche di una funzione, quindi possiamo tracciare il suo grafico con una buona approssimazione. Possiamo tracciare solo un grafico probabile, perché alcuni elementi, come ad esempio i punti di massimo e di minimo, non siamo ancora in grado di determinarli.

Per rappresentare il grafico probabile di una funzione dobbiamo:

- Determinare il dominio
- Studiare eventuali simmetrie
- Determinare le intersezioni con gli assi cartesiani
- Studiare il segno
- Calcolare i limiti agli estremi del dominio
- Determinare gli asintoti e discontinuità

Vediamo un esempio:

ESEMPIO

Tracciamo il grafico probabile della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$$

- ✓ Calcoliamo il dominio: funzione razionale fratta quindi il denominatore deve essere $\neq 0$, cioè $x + 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -1 \;\Rightarrow$, quindi

$$D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

- ✓ Simmetrie: la funzione non è né pari né dispari infatti $f(x) \neq f(-x)$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x)}{-x + 1} = \frac{x^2 + 2x}{-x + 1} \neq f(x)$$

E $f(x) \neq -f(-x)$

$$-f(-x) = -\frac{(-x)^2 - 2(-x)}{-x + 1} = \frac{x^2 + 2x}{x - 1} \neq f(x)$$

- ✓ Intersezione assi cartesiani:

con asse x, poniamo $f(x) = 0$

$\frac{x^2-2x}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \vee x = 2 \qquad A(0,0) \quad B(2,0)$

- ✓ Studio del segno:

poniamo $f(x) > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{x^2-2x}{x+1} > 0$

N>0 $\quad x > 0$

$\qquad x > 2$

D>0 $\quad x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -1$

		-1		0		2	
N	--		--		+		+
N	--		--		--		+
D	-		+		+		+
$f(x)$	--		+		--		+

✓ Limiti agli estremi del dominio:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x}{x+1} = \frac{-\infty}{+\infty}$ forma indeterminata dal confronto dei gradi otteniamo

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x}{x+1} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x}{x+1} = \frac{+\infty}{+\infty}$ forma indeterminata dal confronto dei gradi otteniamo

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x}{x+1} = +\infty$

$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2-2x}{x+1} = -\infty$

$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2-2x}{x+1} = +\infty$

Avremo un asintoto verticale in $x = -1$

Calcoliamo l’asintoto obliquo:

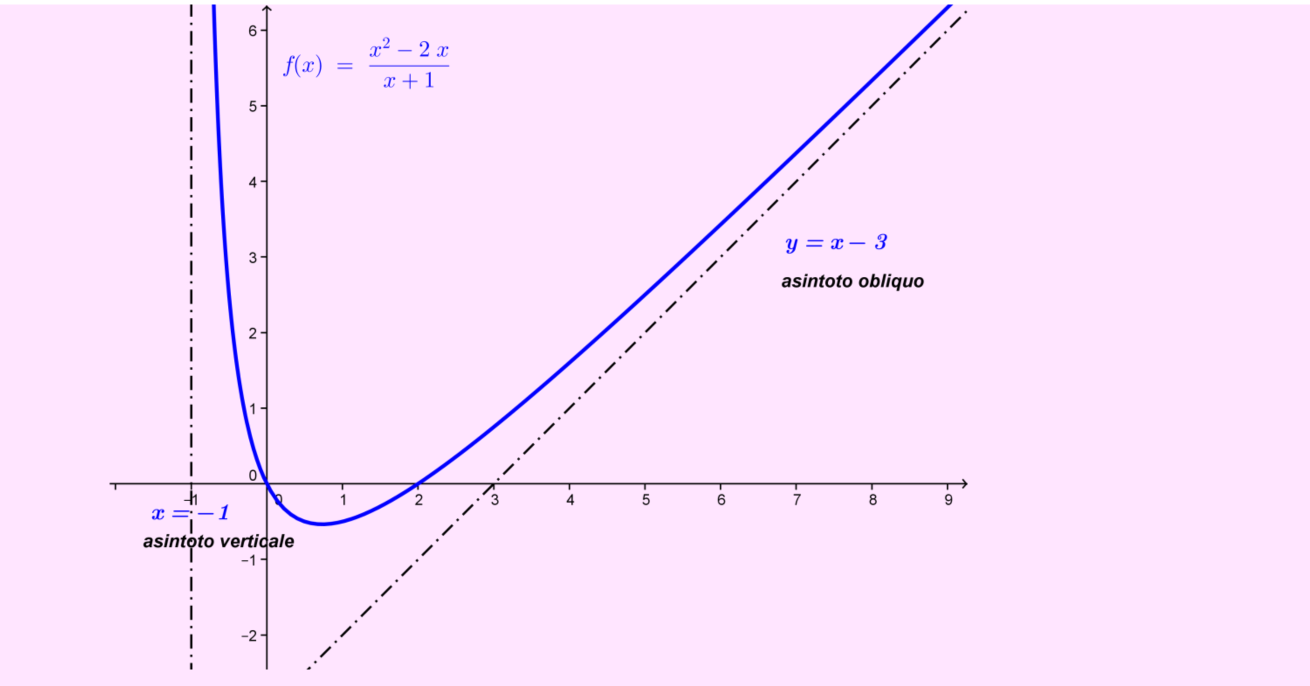
determiniamo m e q

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x}{x+1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x}{x^2+x} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x}{x+1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x}{x+1} = -3$$

Quindi la retta $y = x - 3$ è un asintoto obliquo.

Il grafico probabile sarà:



18. TEOREMI SUI LIMITI

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

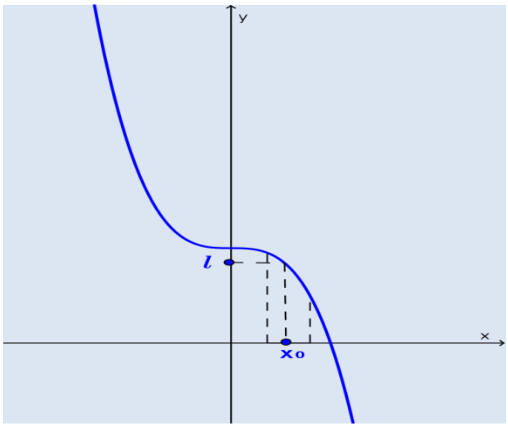
Se la funzione $f: A \to \mathbb{R}$ ammette limite $l \in \mathbb{R}^*$ per $x \to x_0$ allora questo limite è unico.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Dati la funzione $f: A \to \mathbb{R}$ e il $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, se $l > 0$ *oppure* $l = +\infty$ allora esiste un opportuno intorno di x_0 in cui $f(x) > 0$.

Analogamente: Dati la funzione $f: A \to \mathbb{R}$ e il $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, se $l < 0$ *oppure* $l = -\infty$ allora esiste un opportuno intorno di x_0 in cui $f(x) < 0$.

Questo teorema mette in evidenza che se il limite della funzione, è per esempio positivo allora riusciamo a trovare almeno un intorno del punto x_0 *tale che se consideriamo un qualsiasi elemento di questo intorno, il corrispondente valore della funzione sarà anch'esso positivo*



OSSERVAZIONE

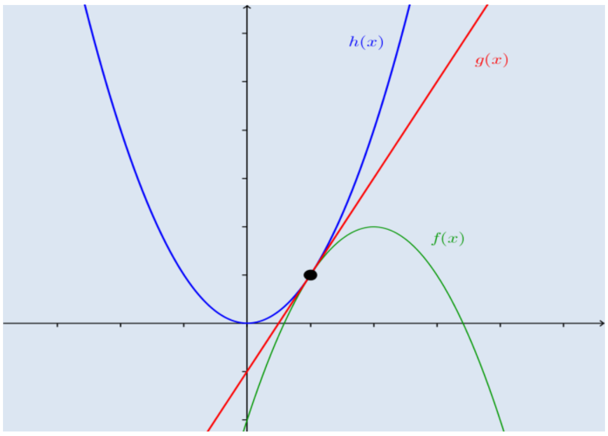
non possiamo dire nulla sul segno della funzione in un intorno del punto x_0, quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

TEOREMA DEL CONFRONTO

Siano date le funzioni $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$ e $h: A \to \mathbb{R}$. Se:

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in un opportuno intorno di x_0
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}^*$

allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$



Graficamente questo teorema mette in evidenza che se il grafico della funzione $g(x)$, in un determinato intervallo, è sempre racchiuso tra quello delle funzioni $f(x)$ e $h(x)$, tale rimarrà anche in un intorno del punto x_0, quindi se il limite di queste funzioni per $x \to x_0$ è l, lo sarà anche per la funzione $g(x)$.

19. I TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

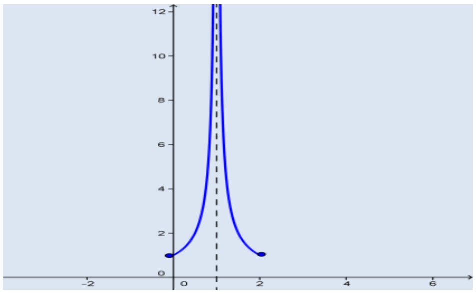
Le funzioni continue possiedono molte proprietà importanti enunciate nei seguenti teoremi:

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora f è limitata in $[a, b]$ ed esiste almeno un punto di massimo M ed almeno un punto di minimo m.

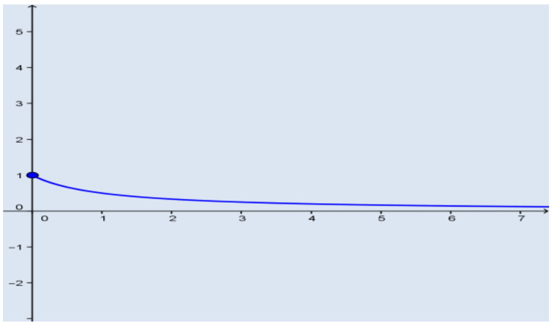
OSSERVAZIONI

- L'ipotesi di continuità è essenziale, consideriamo come controesempio la seguente funzione:



La funzione non è continua nel punto $x = 1$, ma nell'intervallo $[0,2]$ ha un minimo ma minimo ma non ha nessun massimo.

- La funzione deve essere definita su un intervallo chiuso altrimenti il teorema non è detto che sia valido consideriamo il seguente controesempio:



La funzione è continua nel punto ma nell'intervallo $[0,+\infty]$ ha un massimo ma non ha nessun mimino.

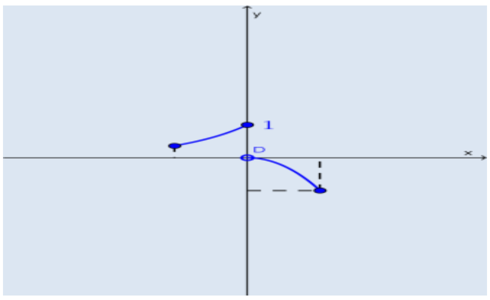
TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI O DI DARBOUX

Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ allora f assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il suo massimo e il suo minimo, cioè $f([a,b]) = [m,M]$.

OSSERVAZIONI

- L'ipotesi di continuità è essenziale, consideriamo come controesempio la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & se -1 \leq x \leq 0 \\ -x^2 & se\ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

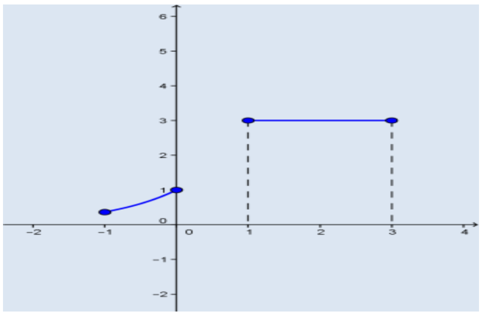


F non è continua in x=0, ammette comunque massimo in $M(0;1)$ e minimo in $m(1;-1)$, ma non assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo.

Infatti il suo codominio è $f([-1,1]) = [-1,0) \cup (e^{-1},1]$, quindi la funzione f non assume i valori compresi nell'intervallo $(0,e^{-1})$.

- La funzione deve essere definita su un intervallo e non su un generico insieme chiuso e limitato, consideriamo come controesempio la funzione:

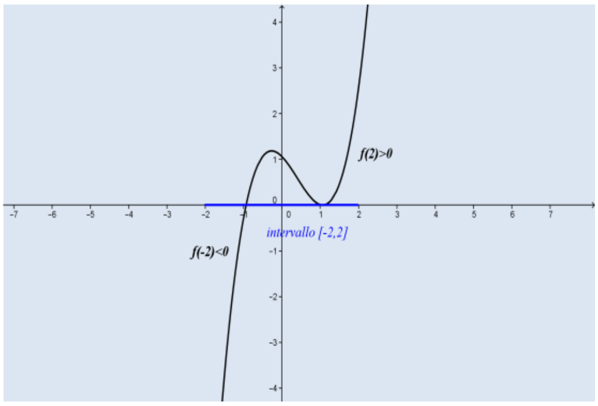
$$f(x) = \begin{cases} e^x & se\ -1 \leq x \leq 0 \\ 3 & se\ 1 < x \leq 4 \end{cases}$$



Il teorema non è valido perché il suo codominio è $f([-1{,}3]) = [e^{-1}, 1) \cup \{3\}$, quindi la funzione f non assume i valori compresi nell'intervallo $(1{,}3)$

TEOREMA DI BOLZANO SULL'ESISTENZA DEGLI ZERI

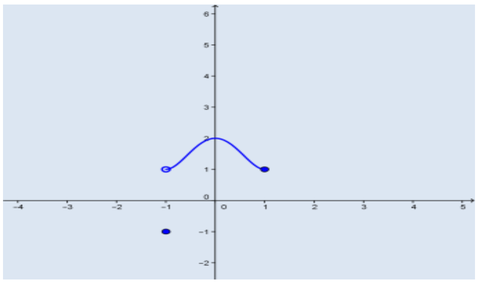
Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora f ed assume valori di segno opposto agli estremi di tale intervallo,
cioè se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ in cui $f(x_0) = 0$.
Se f è crescente o decrescente in tale intervallo allora il punto x_0 è unico.



OSSERVAZIONI

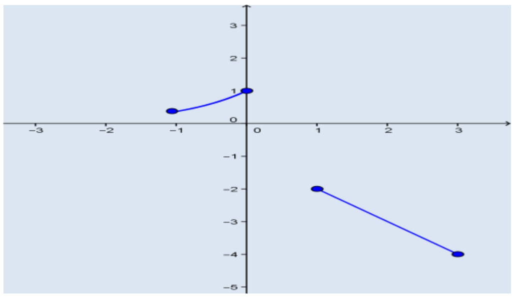
- L'ipotesi di continuità è essenziale, consideriamo come controesempio la seguente funzione:

  la funzione è definita nell'intervallo $[-1{,}1\,]$, $f(-1) \cdot f(1) < 0$, ma non esiste nessun punto dell'intervallo in cui essa si annulla



- La funzione deve essere definita su un intervallo e non su un generico insieme chiuso e limitato, consideriamo come controesempio la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & se -1 \leq x \leq 0 \\ -3x & se\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



Il teorema non è valido perché la funzione è definita nell'intervallo $[-1,4]$, $f(-1) \cdot f(3) < 0$, ma non esiste nessun punto dell'intervallo in cui essa si annulla.

TEOREMA DI INVERTIBILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

Sia f un a funzione continua, la funzione è invertibile nel suo codominio se e solo se è monotona. Inoltre la funzione inversa risulta anch'essa continua e monotona.