CAPITOLO 1

PROBLEMI DI SCELTA

1. GENERALITA' SULLA RICERCA OPERATIVA (R.O.)

La ricerca operativa nacque durante la seconda guerra mondiale nei paesi anglosassoni per risolvere problemi di natura militare (impianti radar per la difesa, strategie di bombardamento contro sommergibili, ecc.), poi si estese ai settori dell'industria, del commercio, dei trasporti, ecc. permettendo di effettuare scelte razionali.

PROBLEMI DI R.O.:

- **Programmazione lineare**: impiegata per la pianificazione della produzione, trasporto di beni, assegnazione delle risorse, ecc.
- **Programmazione dinamica**: impiegata per la programmazione delle spese di pubblicità, distribuzione delle vendite, ecc.
- **Teoria delle code**: impiegata per problemi di traffico, manutenzione degli impianti, ecc.
- **Teoria delle scorte**: impiegata per problemi di approvvigionamento e conservazione di beni in magazzino.
- **Teoria dei grafi**: impiegata per reti di comunicazione ed analisi e controllo di progetti.
- **Teoria dei giochi**: impiegata per problemi di decisione in condizioni competitive.

FASI DELLA R.O.:

1. **Esame della situazione reale** e **raccolta della informazioni**.
2. **Formulazione del problema** con l'individuazione degli obiettivi e della funzione economica da ottimizzare (massimizzare o minimizzare).
3. Costruzione del **modello matematico**.
4. Ricerca della **soluzione del modello**.
5. **Analisi e verifica delle soluzioni ottenute**. Se le soluzioni sono soddisfacenti si passa alla fase 6 altrimenti si riparte dalla fase 3.
6. **Attuazione**.

MODELLO MATEMATICO

Esso è costituito da una funzione economica, detta **funzione obiettivo**, da ottimizzare che dipende da alcune variabili, dette **variabili d'azione**, e da **vincoli** (disequazioni) cui sono sottoposte le variabili stesse. I vincoli si suddividono in **vincoli tecnici** (imposti dal problema) e **vincoli di segno** (poiché le variabili rappresentano quantità di un bene reale non possono essere negative). Schematicamente:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \textit{funzione obiettivo}$$

con i vincoli:

$$\begin{cases} g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 & \textit{vincoli tecnici} \\ x_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n & \textit{vincoli di segno} \end{cases}$$

Per effetto dei vincoli le variabili possono assumere un insieme di valori, detto **campo di scelta**, che può essere **discreto** (se i valori delle variabili sono numeri naturali) o **continuo** (se i valori delle variabili sono numeri reali).

2. PROBLEMI DI SCELTA

Si suddividono in:

- **Problemi di scelta in condizioni di certezza**: se i dati e le conseguenze sono determinabili a priori.
- **Problemi di scelta in condizioni di incertezza**: se le conseguenze della scelta non sono certe.

Un'ulteriore suddivisione è:

- **Problemi di scelta con effetti immediati**: se fra il momento della decisione e quello della realizzazione trascorre un tempo breve, che non influisce sulle grandezze economiche.
- **Problemi di scelta con effetti differiti**: se fra il momento della decisione e quello della realizzazione trascorre un tempo di cui è indispensabile tenere conto; cioè il problema ha conseguenze differite nel tempo.

3. PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA CON EFFETTI IMMEDIATI

Si considerino, per semplificare il problema, le variabili certe; ad esempio si pensi che tutta la quantità prodotta sia venduta, anche se in realtà ciò non è sempre vero. Distinguiamo due casi.

PROBLEMI DI SCELTA NEL CASO CONTINUO

In questi problemi la funzione economica è una funzione reale di variabile reale $y = f(x)$ con $x \in [a, b] \subset \mathcal{R}$. Quindi si rappresenta graficamente la funzione e si trova il massimo o il minimo nell'intervallo considerato.

ESEMPI

1. Per la produzione di un bene un'impresa sostiene una spesa fissa settimanale di € 360, un costo di € 5 per ogni quintale prodotto ed una spesa stimata pari all'0.1% del quadrato del numero di quintali prodotti per la manutenzione degli impianti. La capacità produttiva massima settimanale è di 800 quintali. Calcolare per quale quantità il costo unitario di produzione è minimo.

Indicato con x la quantità da produrre e vendere (in quintali), il costo totale di produzione è:

$$C(x) = 360 + 5x + 0.001x^2$$

Il costo unitario sarà:

$$C(x) = \frac{360 + 5x + 0.001x^2}{x}$$

Quindi il modello matematico è:

$$y = \frac{360 + 5x + 0.001x^2}{x} \qquad da\ minimizzare$$

con i vincoli:

$$\begin{cases} x \leq 800 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Questa è una funzione di asintoti: $x = 0$ e $y = 0.001x + 5$. Con l'uso della derivata prima si calcolano i massimi e minimi.

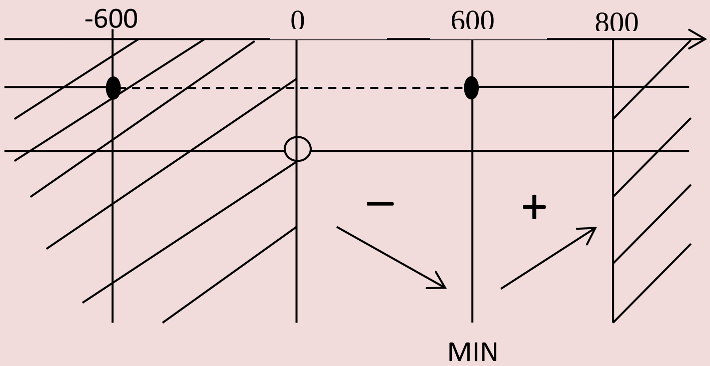
$$y' = \frac{0.001x^2 - 360}{x^2}$$

Si pone:

$$\frac{0.001x^2 - 360}{x^2} \geq 0$$

$N \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0.001x^2 - 360 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq -600 \ \cup \ x \geq 600$

$D > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0$



Quindi il minimo costo unitario si ha per una produzione di 600 quintali la settimana ed è di € 6,2.

2. Una ditta acquista beni per rivenderli ai dettaglianti. Il costo dei beni è di € 60 al quintale; però per acquisti di almeno 400 quintali il prezzo è ridotto a € 50 al quintale. Detta x la quantità di beni richiesta e p il prezzo al quintale, la domanda dei beni è data dalla funzione:

$$x = 1.800 - 10p$$

I costi settimanali della ditta sono di € 12.000 ed al massimo può acquistare 1.000 quintali di beni. Calcolare quanti quintali di beni la ditta deve acquistare e rivendere per ottenere il massimo guadagno.

Il costo totale è dato dalla funzione:

$$C(x) = \begin{cases} 60x + 12.000 & 0 \leq x < 400 \\ 50x + 12.000 & x \geq 400 \end{cases}$$

Da $x = 1.800 - 10p$ si ricava $p = 180 - 0.1x$.

Il ricavo è dato da:

$$R(x) = p \cdot x = 180x - 0.1x^2$$

Il modello matematico per il guadagno è:

$$y = \begin{cases} -0.1x^2 + 120x - 12.000 & 0 \leq x < 400 \\ -0.1x^2 + 130x - 12.000 & 400 \leq x \leq 1.000 \end{cases}$$

Graficamente sono due archi di parabola di cui si chiede il massimo.

- Il vertice della prima parabola è $V_1(600; 24.000)$ che è fuori dall'intervallo considerato;
- $y(400) = 24.000$;
- il vertice della seconda parabola è $V_2(650; 30.250)$;
- $y(1.000) = 18.000$

Quindi il massimo utile di € 30.250 si ottiene per 650 quintali di beni acquistati e venduti.

Problemi di scelta nel caso discreto

Se la variabile è intera la funzione obiettivo si rappresenta solo con punti nel piano.

- Se i valori sono finiti e poco numerosi, si possono tabulare e dalla tabella si deduce il valore per cui si ha il minimo o il massimo.
- Si può utilizzare il **criterio marginalistico**: si calcolano gli incrementi della funzione tra due valori successivi della variabile $\Delta f = f(x+1) - f(x)$. Se gli incrementi sono positivi, la funzione è crescente, in caso contrario è decrescente. Quando gli incrementi da positivi diventano negativi, si ha un massimo; se da negativi diventano positivi, si ha un minimo.
- Se i valori sono finiti ma molto numerosi, si approssima la funzione con una funzione continua; si calcola il massimo o il minimo di tale funzione $(x_0; f(x_0))$; si individua l'intervallo tra due numeri

interi consecutivi in cui è compreso x_0, cioè $x_1 < x_0 < x_2$ con x_1, x_2 interi e $x_2 = x_1 + 1$; si calcola la funzione in x_1 e x_2 e si decide qual è l'ottimo richiesto dal problema.

ESEMPI

1. Un'azienda produce lampadine in lotti di 100 pezzi ciascuno. Le spese di lavorazione sono:

- spesa fissa: € 400 al giorno;
- € 1,50 al pezzo.

Il limite di produzione è di 10 lotti al giorno. Il prezzo di vendita è dato dalla seguente tabella:

n° lotti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
prezzo al lotto	420	420	400	380	360	340	310	280	250	230

Calcolare quanti lotti conviene produrre al giorno per realizzare il massimo utile, nell'ipotesi che tutti i lotti prodotti siano venduti.

Si imposta la seguente tabella:

n° lotti	**costi**	**ricavi**	**utile**	**costi marginali**	**ricavi marginali**
1	550	420	- 130	---	---
2	700	840	140	150	420
3	850	1.200	350	150	360
4	1.000	1.520	520	150	320
5	1.150	1.800	650	150	280
6	1.300	2.040	**740**	150	240
7	1.450	2.170	720	150	130
8	1.600	2.240	640	150	70
9	1.750	2.250	500	150	10
10	1.900	2.300	400	150	50

Il massimo utile di € 740 si ottiene per la produzione di 6 lotti al giorno. Quindi conviene espandere la produzione finché il ricavo marginale supera il costo marginale.

2. Le spese di produzione di un abito, in un ciclo di lavorazione, si suddividono in:

- spese fisse € 2.400;
- costo di lavorazione: € 300 per ogni abito;
- costo per la manutenzione degli impianti pari allo 10% del quadrato del numero degli abiti prodotti;
- spesa del 4% del fatturato per la pubblicità.

Prezzo di vendita: € 600 per ogni abito. Sapendo che la massima capacità produttiva è di 1.500 unità, calcolare per quale quantità l'impresa realizza il massimo utile e fra quali produzioni non è in perdita.

La funzione utile è data da:

$$y = 600x - (2.400 + 300x + 0{,}1x^2 + 0{,}04 \cdot 600x) \qquad \text{da massimizzare}$$

con i vincoli:

$$\begin{cases} x \leq 1.500 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Per stabilire l'intervallo in cui l'azienda non è in perdita basta porre:

$$-0{,}1x^2 + 276x - 2.400 > 0$$

quindi $8{,}72 < x < 2.751{,}77$. Ma poiché il problema è discreto, i limiti di produzione devono essere numeri interi, inoltre tenendo conto dei vincoli si ottiene: $9 \leq x \leq 1.500$.

Per trovare la quantità da produrre per ottenere il massimo utile si può utilizzare la derivata prima oppure si può calcolare il vertice della parabola che rappresenta la funzione obiettivo: $V(1.380; 188.040)$.

Quindi il massimo utile di € 188.040 si ottiene per una produzione di 1.380 abiti.

PROBLEMI DI SCELTA TRA PIÙ ALTERNATIVE

In questo tipo di problemi è necessario confrontare graficamente sullo stesso piano cartesiano le funzioni obiettivo delle varie alternative. Si calcolano poi i punti di intersezione, detti **punti di indifferenza**, e si sceglie quindi l'alternativa più conveniente in ogni intervallo che si è individuato.

ESEMPIO

Una ditta deve decidere la produzione di un bene fra due modelli che hanno i seguenti costi di produzione:

A. costo fisso settimanale di € 200 e € 40 per ogni unità;

B. costo fisso settimanale di € 500 e € 50 per ogni unità.

Il modello A può essere venduto al prezzo di € 50, il modello B al prezzo di € 65.

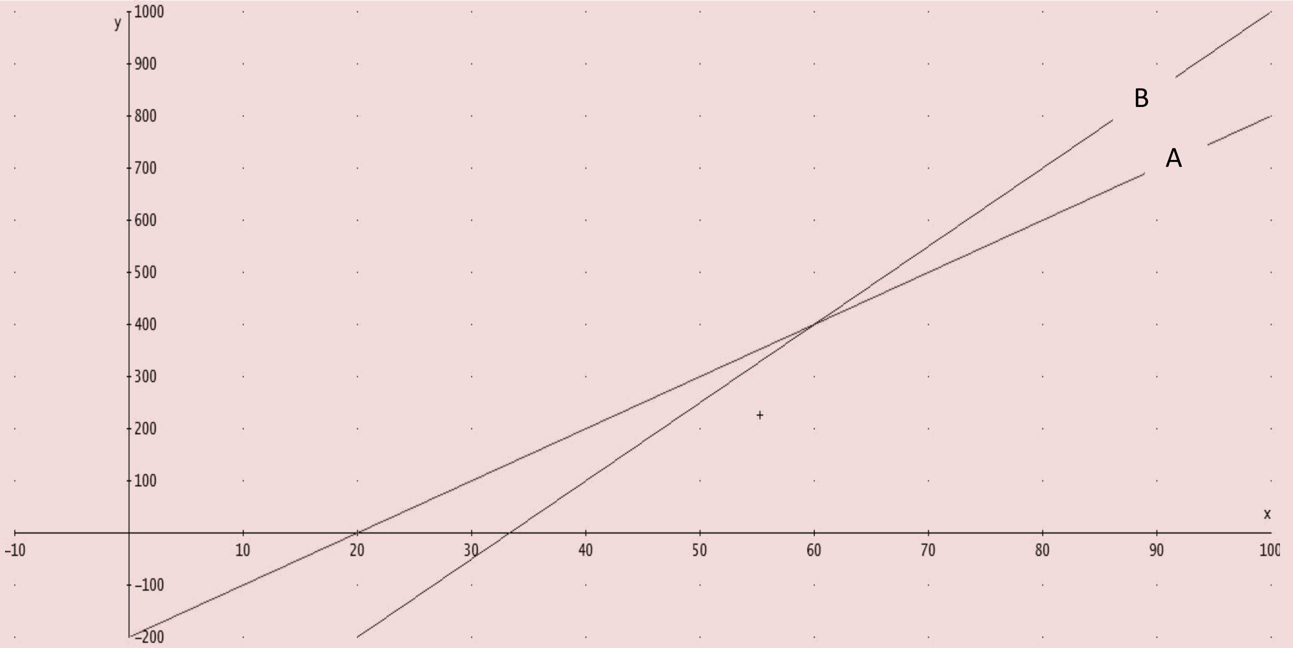
Determinare quale modello è più conveniente produrre in funzione della quantità venduta.

Le funzioni utili dei due modelli sono:

$$y_A = 50x - (200 + 40x) = 10x - 200$$

$$y_B = 65x - (500 + 50x) = 15x - 500$$

Rappresentando graficamente le due funzioni, si ottiene:



Si calcola poi il punto di intersezione tra le rette dei modelli A e B:

$$\begin{cases} y = 10x - 200 \\ y = 15x - 500 \end{cases} \Rightarrow \quad 15x - 500 = 10x - 200 \quad \Rightarrow \quad x = 60 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 60 \\ y = 400 \end{cases}$$

Quindi:

- non conviene produrre meno di 20 unità;
- conviene scegliere il modello A per un numero di unità tale che $20 \leq x \leq 60$;
- conviene scegliere il modello B per un numero di unità tale che $x \geq 60$;
- per un numero di unità pari a 60 è indifferente scegliere il modello A o B.

4. PROBLEMA DELLE SCORTE

Ogni impresa per la produzione di merci ha necessità di avere in magazzino una quantità sufficiente di materia prima; per le ordinazioni inoltre si sostengono spese fisse di spedizione oltre le spese per la merce acquistata e perciò si devono fare poche ordinazioni di grandi quantitativi; la conservazione delle merci in magazzino comporta anche altre spese (assicurazione, sorveglianza, ecc.) oltre al fatto che la merce può deperire se giace troppo tempo in magazzino. Quindi è necessario tener conto di tutti i fattori a volte contrastanti. Il problema delle scorte consiste nel determinare la quantità di merce da ordinare ogni volta in modo da minimizzare la spesa complessiva supponendo però che: il consumo della merce sia uniforme nel tempo e la merce ordinata arrivi appena è finita la partita precedente.

✸ Prezzo della merce costante.

Siano: x la quantità di merce da ordinare ogni volta;

Q la quantità di merce che serve in un intervallo di tempo (generalmente l'anno);

$\frac{Q}{x}$ il numero di ordinazioni da effettuare;

c_0 la spesa fissa di ogni ordinazione;

$c_0 \cdot \frac{Q}{x}$ la spesa per tutte le ordinazioni da effettuare in quell'intervallo di tempo;

$\frac{x}{2}$ il valore medio della scorta;

s il costo di magazzino per ogni unità di scorta;

c_m le spese di magazzinaggio proporzionali alla scorta media;

C la capienza del magazzino.

Il modello matematico del problema delle scorte è:

$$y = c_0 \cdot \frac{Q}{x} + s \cdot \frac{x}{2} \qquad \textit{da minimizzare}$$
$$\textit{con il vincolo}:$$
$$0 < x \leq C$$

Tale funzione ha un minimo, che si può calcolare utilizzando la derivata prima, nel punto di coordinate

$$\left(\sqrt{\frac{2c_0Q}{s}};\ \sqrt{2c_0sQ}\right)$$

Se tale punto è interno all'intervallo individuato dal vincolo, è un minimo assoluto; se è esterno, essendo la funzione decrescente, il minimo si avrà per $x = C$. La quantità che rende minima la spesa complessiva è detta **lotto economico**.

✸ Prezzo della merce con sconti per acquisti superiori ad una certa quantità.

Sia anche: p prezzo della merce.

Il modello matematico del problema delle scorte diventa:

$$y = c_0 \cdot \frac{Q}{x} + s \cdot \frac{x}{2} + p \cdot Q \qquad \textit{da minimizzare}$$
$$\textit{con il vincolo}:$$
$$0 < x \leq C$$

ESEMPI

1. Un'azienda ha bisogno, per la sua attività, di 90 q di materia prima al mese. La spesa fissa per ogni ordinazione è di € 40 e le spese di magazzinaggio sono di € 24 al quintale all'anno. Sapendo che la capacità del magazzino è di 80 q, calcolare la quantità di materia prima che conviene ordinare ogni volta per rendere minime le spese complessive, il numero di ordinazioni occorrenti in un anno e la loro periodicità.

La funzione obiettivo è:

$$y = 40 \cdot \frac{12 \cdot 90}{x} + 24 \cdot \frac{x}{2} = \frac{43.200}{x} + 12x$$

Il modello matematico è:

$$y = \frac{43.200}{x} + 12x \qquad \textit{da minimizzare}$$

$$\textit{con i vincoli}:$$

$$0 < x \leq 80$$

Calcolando la derivata prima:

$$y' = -\frac{43.200}{x^2} + 12$$

Ponendo $y' = 0$ si ottiene: $x = \pm 60$. La soluzione negativa non è accettabile per i vincoli del problema, quindi la quantità di materia prima che conviene ordinare ogni volta per rendere minime le spese complessive di € 1.440 è di 60 q, il numero di ordinazioni da effettuare in un anno è

$$n° \; ordinazioni = \frac{12 \cdot 90}{60} = 18$$

e le ordinazioni vanno effettuate ogni

$$T = \frac{360}{18} = 20 \; gg$$

2. Un'azienda ha un consumo annuo di 800 Kg di materie prime che acquista al prezzo di € 1,2 al Kg, con uno sconto del 10% in caso di acquisti uguali o superiori a 200 Kg. La spesa fissa per ogni ordinazione è di € 6 e le spese di magazzinaggio sono di € 8 al mese al quintale. Calcolare la quantità ottima da ordinare ogni volta per rendere minima la spesa complessiva nel caso in cui la capacità massima del magazzino sia di 300 Kg e nel caso sia di 100 Kg.

Il modello matematico è:

$$y = \begin{cases} 6 \cdot \frac{800}{x} + 0{,}08 \cdot 12 \cdot \frac{x}{2} + 1{,}2 \cdot 800 & se \; 0 < x < 200 \\ 6 \cdot \frac{800}{x} + 0{,}08 \cdot 12 \cdot \frac{x}{2} + 1{,}08 \cdot 800 & se \; x \geq 200 \end{cases}$$

con i vincoli: $0 < x \leq 300$ nel primo caso e $0 < x \leq 100$ nel secondo caso.

Si calcola il minimo nel primo ramo della funzione:

$$y' = -\frac{4.800}{x^2} + 0{,}48$$

Ponendo $y' = 0$ si ottiene: $x = \pm 100$.

- La soluzione negativa non è accettabile per i vincoli del problema;
- $y(100) = 1.056$;

- Il minimo del secondo ramo della funzione è sempre in $x = 100$ che però non è accettabile, quindi in $x \geq 200$ il secondo ramo è crescente ed il minimo si ha per $x = 200$;
- $y(200) = 984$.

Quindi se $0 < x \leq 300$:

le spese complessive minime di € 984 si ottengono per ordinazioni di 200 Kg di materie prime, il numero di ordinazioni da effettuare in un anno è

$$n°\ ordinazioni = \frac{800}{200} = 4$$

e le ordinazioni vanno effettuate ogni

$$T = \frac{360}{4} = 90\ gg = 3\ mesi$$

Se invece $0 < x \leq 100$:

le spese complessive minime di € 1.056 si ottengono per ordinazioni di 100 Kg di materie prime, il numero di ordinazioni da effettuare in un anno è

$$n°\ ordinazioni = \frac{800}{100} = 8$$

e le ordinazioni vanno effettuate ogni

$$T = \frac{360}{8} = 45\ gg$$

5. PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA CON EFFETTI DIFFERITI

Nel caso in cui la scelta è immediata e non vi sono dubbi su di essa, si parla di **criterio di preferenza assoluta**; come nei problemi di investimenti finanziari, commerciali, industriali. I metodi di risoluzione, tutti basati sull'operazione di sconto composto, sono:

CRITERIO DELL'ATTUALIZZAZIONE

Consiste nel calcolare il valore attuale, ad un prefissato tasso, di costi e ricavi futuri di tutte le alternative e poi scegliere l'alternativa con valore attuale migliore; è utilizzato soprattutto negli investimenti finanziari ed industriali; in quest'ultimo caso se la durata prevista dei macchinari è diversa, si considera come durata comune il minimo comune multiplo delle dutare. Si calcola il r.e.a., ossia il **risultato economico attualizzato**, come differenza tra valore attuale dei ricavi futuri ed il valore attuale dei costi futuri:

$$r.e.a. = V(R) - V(C)$$

La scelta del tasso è soggettiva, quindi la scelta dell'alternativa migliore può dipendere dalla scelta del tasso e persone diverse possono scegliere alternative diverse.

CRITERIO DEL TASSO EFFETTIVO DI IMPIEGO (o tasso interno di rendimento)

Consiste nel determinare per ogni operazione finanziaria a quale tasso il valore attuale dei ricavi eguagli il valore attuale dei costi. Dovendo scegliere tra varie alternative: nel caso di un investimento si sceglierà l'alternativa con tasso maggiore, nel caso di un finanziamento quella con tasso inferiore. (Un esempio di utilizzo si ha quando si deve scegliere tra mutuo e leasing.)

CRITERIO DELL'ONERE MEDIO ANNUO

Consiste nel ripartire costi e ricavi come se fossero rate costanti di una rendita e nel scegliere l'alternativa con l'onere medio annuo minore; è utilizzato soprattutto nel confronto di investimenti industriali. Si procede calcolando una rata costante che comprende i costi di esercizio e una rata di ammortamento del costo di acquisto diminuito del valore attuale dell'importo di recupero. Nel caso in cui i costi di esercizio non fossero costanti, è necessario calcolare i loro valori attuali con un tasso prefissato che però è soggettivo.

ESEMPI

1. Fabio acquista un negozio che costa € 200.000. Per il pagamento può scegliere tra le seguenti alternative:

A. Pagare in contanti

B. Versare subito il 30% del valore e poi 15 rate annue posticipate di € 15.000

C. Versare 20 rate annue anticipate di € 16.000; senza alcun acconto.

Determinare l'alternativa più conveniente in base al tasso annuo del 6% e del 5%.

Calcoliamo il valore attuale delle tre alternative al tasso annuo del 6%.

$V(A) = 200.000$

$V(B) = 0,30 \cdot 200.000 + 15.000 \cdot a_{15]0.06} = 205.683,73$

$V(C) = 16.000 \cdot \ddot{a}_{20]0.06} = 194.529,86$

Quindi conviene l'alternativa C, ossia quella che consente il pagamento più basso.

Calcoliamo ora il valore attuale delle tre alternative al tasso annuo del 5%.

$V(A) = 200.000$

$V(B) = 0,30 \cdot 200.000 + 15.000 \cdot a_{15]0.05} = 215.694,87$

$V(C) = 16.000 \cdot \ddot{a}_{20]0.05} = 209.365,13$

Quindi conviene l'alternativa A, cioè pagare in contanti.

2. Un'impresa deve decidere l'acquisto di un macchinario scegliendolo tra due modelli A e B con le seguenti caratteristiche:

Modello **A**: costo: € 30.000

spese annue di esercizio: € 1.200; durata 6 anni

valore di recupero: € 12% del costo

Modello **B**: costo: € 32.000

spese annue di esercizio: € 900; durata 8 anni

valore di recupero: 10% del costo

Determinare quale tra i due modelli è più conveniente acquistare in base al tasso annuo del 7,5%.

Modello **A**: il valore attuale, per un ciclo, del macchinario è:

$$V_1 = 30.000 + 1.200 \cdot a_{6]0.075} - 0.12 \cdot 30000 \cdot (1 + 0.075)^{-6} = 37.965{,}28$$

Per i 4 cicli previsti il valore attuale sarà:

$$V(A) = 37.965{,}28 + 37.965{,}28 \cdot 1.075^{-6} + 37.965{,}28 \cdot 1.075^{-12} + 37.965{,}28 \cdot 1.075^{-18}$$
$$= 88.833{,}63$$

Modello **B**: il valore attuale, per un ciclo, del macchinario è:

$$V_1 = 32.000 + 900 \cdot a_{8]0.075} - 0.10 \cdot 30000 \cdot (1 + 0.075)^{-8} = 38.953{,}68$$

Per i 3 cicli previsti il valore attuale sarà:

$$V(A) = 38.953{,}68 + 38.953{,}68 \cdot 1.075^{-8} + 38.953{,}68 \cdot 1.075^{-16} = 73.041{,}63$$

Quindi, al tasso del 7,5%, è più conveniente l'acquisto del macchinario B.

3. Simona vuole impiegare il capitale di € 60.000 e deve scegliere tra due alternative:

A. Dare in prestito il capitale convenendo il rimborso di due somme uguali di € 45.000, la prima fra 4 anni e la seconda fra 8 anni.

B. Investire la somma in un'operazione finanziaria che le consentirà di incassare € 3.200 alla fine di ogni trimestre per 8 anni.

Determinare quale investimento è più conveniente utilizzando il tasso interno di rendimento.

Si calcola per entrambe le alternative il tasso effettivo di impiego.

A. $$60.000 = 45.000 \cdot (1 + i)^{-4} + 45.000 \cdot (1 + i)^{-8}$$

Posto $(1 + i)^{-4} = t$ e dividendo l'equazione precedente per 15.000, si ottiene:

$$3t^2 + 3t - 4 = 0$$

Risolvendo si ottiene: $t = -1.758305739$ e $t = 0.7583057392$

Scartando la soluzione negativa, non accettabile in un problema finanziario, si ha:

$$(1 + i)^{-4} = 0.7583057392$$

da cui:

$$i = \sqrt[4]{\frac{1}{0.7583057392}} - 1 = 0{,}0716 = 7{,}16\%$$

B. $$60.000 = 3.200 \cdot a_{32|i_4}$$

Da cui si ricava che: $a_{32|i_4} = 18{,}75$

Utilizzando le tavole finanziarie si ottiene:

n	3,50%	i_4	3,75%
8	19,06886547	18,75	18,45654941

ed interpolando:

$$i_4 = \frac{18{,}75 - 19{,}06886547}{18{,}45654941 - 19{,}06886547}(3{,}75 - 3{,}50) + 3{,}50 = 0{,}036301883$$

Convertendo il tasso trimestrale in tasso annuo:

$$i = (1 + 0{,}036301883)^4 - 1 = 0{,}153307586 = 15{,}33\%$$

Poiché stiamo parlando di un investimento conviene l'alternativa con tasso effettivo di impiego maggiore, quindi l'alternativa B

4. Per l'acquisto di un macchinario industriale del costo di € 100.000, una ditta deve scegliere se stipulare un contratto di leasing o se contrarre un mutuo.

Leasing: pagamento all'acquisto di € 20.000, versamento di canoni mensili posticipati di € 1.500 per 5 anni, riscatto fra 5 anni con pagamento del 10% del valore odierno dell'attrezzatura.

Mutuo: pagamento del 10% del costo all'acquisto e successivo versamento di 10 rate semestrali posticipate di € 12.000.

Determinare quale forma di rimborso è più conveniente per la ditta utilizzando il tasso interno di rendimento.

Leasing: per il principio di equivalenza finanziaria si ottiene:

$$100.000 = 20.000 + 1.500 \cdot a_{60|i_{12}} + 10.000 \cdot (1 + i_{12})^{-60}$$

Dividendo per 500:

$$200 = 40 + 3a_{60|i_{12}} + 20 \cdot (1 + i_{12})^{-60}$$

Questa equazione va risolta per tentativi, ottenendo la seguente tabella:

0.50%	i_{12}	0,75%
210,0041262	200	197,2941145

e poi per interpolazione:

$$i_{12} = \frac{200 - 210{,}0041262}{197{,}2941145 - 210{,}0041262}(0{,}75 - 0{,}50) + 0{,}50 = 0{,}696776495\ \%$$

Convertendo il tasso mensile in tasso annuo:

$$i = (1 + 0{,}00696776495)^{12} - 1 = 0{,}086893 = 8{,}69\ \%$$

Mutuo: per il principio di equivalenza finanziaria si ottiene:

$$100.000 = 10.000 + 12.000 \cdot a_{10]i_2}$$

da cui: $a_{10]i_2} = 7{,}5$

Utilizzando le tavole finanziarie si ottiene:

n	5,50%	i_2	5,75%
10	7,53762583	7,5	7,44805352

ed interpolando:

$$i_2 = \frac{7{,}5 - 7{,}53762583}{7{,}44805352 - 7{,}53762583}(5{,}75 - 5{,}50) + 5{,}50 = 0{,}056050152$$

Convertendo il tasso trimestrale in tasso annuo:

$$i = (1 + 0{,}056050152)^2 - 1 = 0.1152 = 11{,}52\ \%$$

Siccome abbiamo a che fare con un rimborso, il tasso più conveniente sarà il minore; quindi conviene il leasing.

5. Un'impresa deve decidere l'acquisto di un macchinario scegliendolo tra due modelli A e B con le seguenti caratteristiche:

Modello **A**: costo: € 30.000
spese annue di esercizio: € 1.200; durata 8 anni
valore di recupero: € 3.600

Modello **B**: costo: € 32.000
spese annue di esercizio: € 900 per i primi 5 anni e € 1.500 per gli ultimi 3 anni; durata 8 anni
valore di recupero: € 3.200

Determinare quale tra i due modelli è più conveniente acquistare al tasso annuo del 7,5% in base al criterio dell'onere medio annuo.

A. Si calcola prima il costo del macchinario diminuito del valore attuale del ricavo della vendita dopo l'utilizzo:

$$C = 30.000 - 3.600 \cdot 1{,}075^{-8} = 27.981{,}47$$

Si ripartisce ora tale costo in 8 rate annue posticipate:

$$R = 27.981{,}47 \cdot \alpha_{8]0.075} = 4.777{,}19$$

Si aggiunge ora la rata costante di esercizio e si ottiene l'onere medio annuo nel caso A:

$$R(A) = 4.777{,}19 + 1.200 = 5.977{,}12$$

B. Non essendo costanti le spese di esercizio, si deve calcolare prima il loro valore attuale da sommare al costo del macchinario diminuito del valore attuale del ricavo della vendita dopo l'utilizzo:

$$V = 32.000 - 3.200 \cdot 1{,}075^{-8} + 900 \cdot a_{5]0.075} + 1.500 \cdot a_{3]0.075} \cdot 1{,}075^{-5} = 36564{,}18$$

Si ripartisce ora tale costo in 8 rate annue posticipate:

$$R(B) = 36564{,}18 \cdot \alpha_{8]0.075} = 6242{,}49$$

Si sceglierà quindi il modello A, che prevede un onere medio annuo minore.