CAPITOLO 2

PROGRAMMAZIONE LINEARE

1. INTRODUZIONE

La programmazione lineare (P.L.) è un ramo della ricerca operativa che si occupa di problemi di programmazione della produzione che richiedono di minimizzare i costi o di massimizzare i ricavi, problemi di miscuglio, problemi di trasporto, problemi di assegnazione e così via. Tali problemi si traducono in un modello matematico costituito da:

a. Una funzione lineare in n variabili (funzione economica) da rendere massima o minima;

b. Un sistema di vincoli espressi da equazioni o disequazioni lineari nelle n variabili;

c. Un sistema di vincoli di segno che impongono la non-negatività delle variabili, in quanto grandezze economiche.

I problemi di P.L. sono quindi problemi di massimo e minimo vincolati, in cui funzione e vincoli sono tutti lineari.

Come metodo di risoluzione verrà qui trattato solo il **metodo grafico**, che permette una visualizzazione dei vincoli sul piano cartesiano e facilita la ricerca del massimo o del minimo. Per questo motivo, quando è possibile, si trasforma un problema di P.L. in più variabili in un problema in due variabili indipendenti.

2. PROBLEMI DI P.L. IN DUE VARIABILI: METODO GRAFICO

Il problema di P.L. in due variabili ha il seguente modello matematico costituito da una funzione **economica**, detta **funzione obiettivo**, da massimizzare o minimizzare:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

soggetta ai vincoli:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 \geq b_r \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \geq b_m \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si risolve il sistema dei vincoli tramite la rappresentazione grafica e si determina la **regione delle soluzioni ammissibili** costituita, se l'insieme non è vuoto, da un poligono o da una regione poligonale illimitata, che possono eventualmente ridursi ad una semiretta, ad un segmento o ad un punto.

<u>Terminologia</u>:

- **Soluzione ammissibile**: ogni coppia di valori $(x_1;\ x_2)$ che soddisfa il sistema dei vincoli.
- **Soluzione di base**: ogni coppia di valori $(x_1;\ x_2)$ ottenuta come intersezione fra due rette che limitano la regione delle soluzioni ammissibili.
- **Soluzioni ammissibili di base**: ogni coppia di valori $(x_1;\ x_2)$ che corrispondono graficamente ai vertici della regione delle soluzioni ammissibili. Fra di esse è da ricercare la **soluzione ottima**.

METODO GRAFICO

1. Si determina la regione delle soluzioni ammissibili mediante la rappresentazione grafica dei vincoli sul piano Ox_1x_2.
2. Se la regione delle soluzioni ammissibili è un **poligono**: si calcola il valore della funzione economica nei vertici di tale poligono e si ricava il vertice (o i vertici) in cui la funzione assume valore massimo o minimo.
3. Se la regione delle soluzioni ammissibili è **illimitata**: si esamina l'andamento delle linee di livello per stabilire se esiste un vertice che ottimizza la funzione.

In molti problemi di P.L. le variabili possono assumere solo valori interi, perché rappresentano un numero di oggetti, un numero di persone e così via, ma il metodo sopra descritto non ne tiene conto e la soluzione del problema è ricercata fra le coppie di numeri reali. Quindi si dovrà cercare, aiutandosi con la rappresentazione grafica, il punto a coordinate intere nella regione delle soluzioni ammissibili che dia l'ottimo.

ESEMPI

1. Un'industria ha in lavorazione due prodotti P_1 e P_2 e per la produzione utilizza due macchinari M_1 e M_2. Per ogni unità di P_1 sono necessarie 2 ore della macchina M_1 e 6 ore della macchina M_2; per ogni unità di P_2 sono necessarie 4 ore della macchina M_1 e 4 ore della macchina M_2; inoltre il prodotto P_1 viene rifinito manualmente e, al massimo, se ne rifiniscono 18 pezzi la settimana. La macchina M_1 può lavorare al massimo per 80 ore la settimana e la macchina M_2al massimo per 120 ore la settimana. A parità di altri costi, determinare quale deve essere la combinazione produttiva più conveniente sapendo che ogni unità di P_1 è venduta a € 120 e ogni unità di P_2 a € 100, nell'ipotesi che tutta la quantità prodotta sia venduta.

Per la risoluzione introduciamo i dati in uno schema:

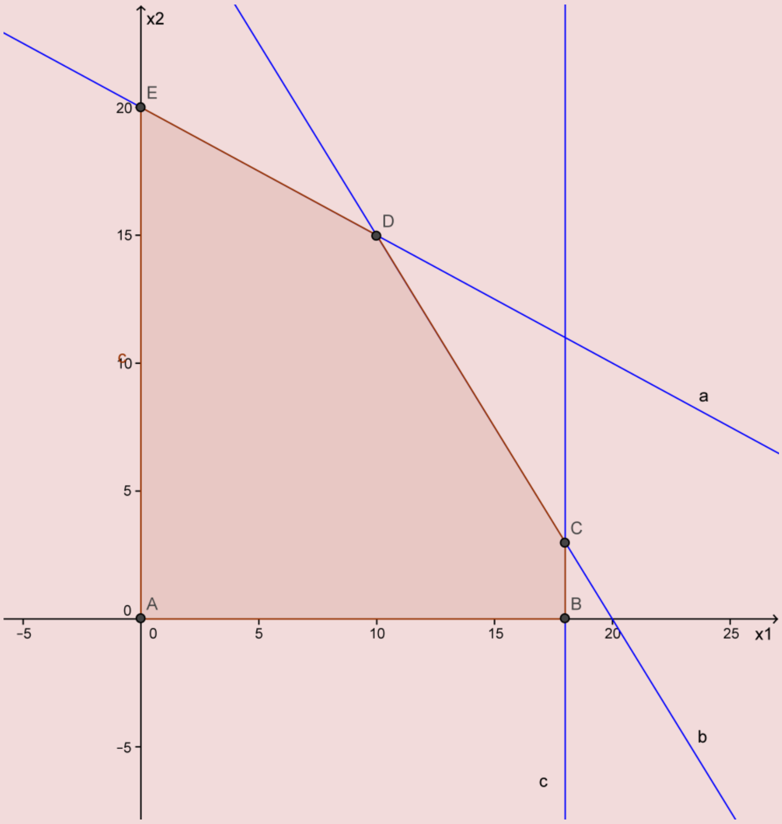
	P_1	P_2	ore disponibili
M_1	2	4	80
M_2	6	4	120

La funzione economica da massimizzare è il ricavo. Indicate con x_1 e x_2 le quantità di P_1 e P_2 da produrre, la funzione economica è $z = 120x_1 + 100x_2$. Il primo vincolo è dato dalle ore disponibili della macchina M_1, il secondo dalle ore disponibili della macchina M_2, il terzo dalla rifinitura a mano. Quindi il modello matematico sarà:

$$z = 120x_1 + 100x_2 \quad da\ massimizzare$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 80 & \boxed{a} \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 120 & \boxed{b} \\ x_1 \leq 18 & \boxed{c} \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ora si disegna nel piano cartesiano la regione delle soluzioni ammissibili, rappresentando graficamente le rette origine dei semipiani $\boxed{a}$, $\boxed{b}$, $\boxed{c}$.



L'area ammissibile è data dal poligono di vertici $OBCDE$, con:

$$O(0;0) \quad B(18;0) \quad C(18;3) \quad D(10;15) \quad E(0;20)$$

Si calcola ora il valore della funzione economica nei vertici di tale poligono:

$$z(O) = 0 \quad z(B) = 2.160 \quad z(C) = 2.460 \quad z(D) = 2.700 \quad z(E) = 2.000$$

La funzione economica è massima nel vertice $D(10;15)$; perciò l'ottimo della funzione economica si ottiene producendo 10 unità di P_1 e 15 unità di P_2 per ottenere un ricavo massimo di € 2.700.

2. Un autotrasportatore può trasportare merci di due tipi M_1 e M_2. La merce M_1 occupa un volume di 0,2 m^3 per quintale e la merce M_2 occupa un volume di 0,3 m^3 per quintale. Il furgone ha una capacità massima di 6 m^3 e può trasportare al massimo 24 quintali di merce. Dal trasporto della merce M_1 ricava un utile di € 4 al quintale e dal trasporto della merce M_2 ricava un utile di € 6 al quintale. Inoltre non effettua il trasporto per carichi complessivi minori di 6 quintali.

Per la risoluzione introduciamo i dati in uno schema:

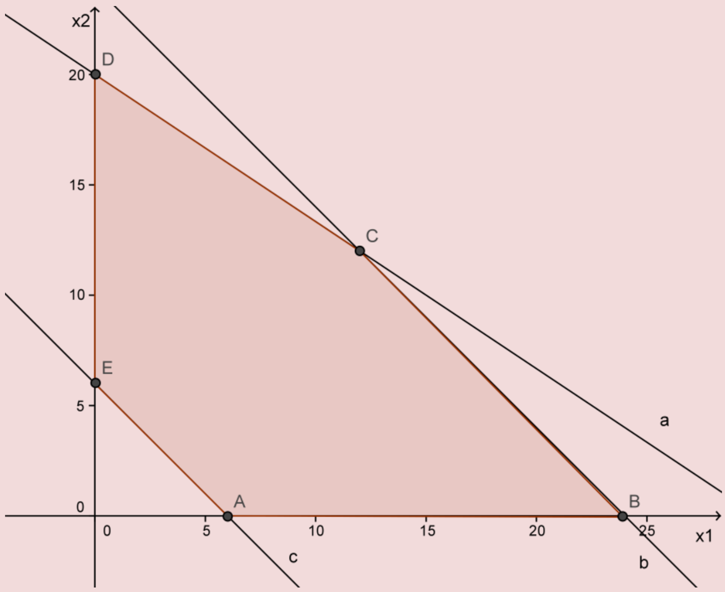
	M_1	M_2	valore massimo
volume in m^3	0.2	0.3	6
peso in quintali	1	1	24

Indicate con x_1 e x_2 (in quintali) le quantità di M_1 e M_2 da trasportare, il modello matematico sarà:

$$z = 4x_1 + 6x_2 \quad da\ massimizzare$$

$$\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \leq 6 & \boxed{a} \\ x_1 + x_2 \leq 24 & \boxed{b} \\ x_1 + x_2 \geq 6 & \boxed{c} \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La regione delle soluzioni ammissibili sarà:



L'area ammissibile è data dal poligono di vertici $ABCDE$, con:

$$A(6;0) \quad B(24;0) \quad C(12;12) \quad D(0;20) \quad E(0;6)$$

Si calcola ora il valore della funzione economica nei vertici di tale poligono:

$$z(A) = 24 \quad z(B) = 96 \quad z(C) = 120 \quad z(D) = 120 \quad z(E) = 36$$

La funzione economica è massima nei vertici $C(12;12)$ e $D(10;15)$, quindi è massima in tutti i punti del segmento $\overline{CD}$, cioè in tutti i punti di coordinate $\left(x_1;\ 20 - \frac{2}{3}x_1\right)$ con $0 \leq x_1 \leq 12$.

Perciò l'autotrasportatore otterrà un ricavo massimo di € 120 per le infinite combinazioni di carico trovate ed opererà la scelta secondo criteri di opportunità.

3. Un agricoltore vuole preparare un concime chimico miscelando due prodotti P_1 e P_2 in commercio che si differenziano per il contenuto di fosfati e nitrati. Ogni chilogrammo di P_1 è formato dal 25% di fosfati, dal 50% di nitrati e per il resto da scorie; ogni chilogrammo di P_2 è formato dal 50% di fosfati, dal 40% di nitrati e per il resto da scorie. Per concimare i suoi campi, l'agricoltore necessita di almeno 50 Kg di fosfati e di almeno 80 Kg di nitrati. Sapendo che ogni Kg di P_1 è venduto a € 20 e ogni Kg di P_2 a € 25, stabilire come dovrà preparare la miscela per rendere minima la spesa.

Introduciamo i dati in uno schema:

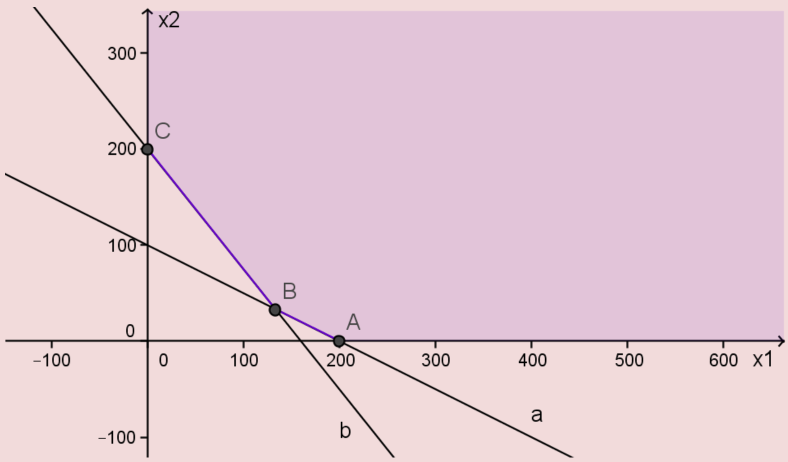
	P_1	P_2	quantità necessaria (Kg)
fosfati	0.25	0.5	50
nitrati	0.5	0.4	80

Indicate con x_1 e x_2 le quantità in Kg di P_1 e P_2 da miscelare, il modello matematico sarà:

$$z = 20x_1 + 25x_2 \quad da\ minimizzare$$

$$\begin{cases} 0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 \geq 50 & \boxed{a} \\ 0{,}5x_1 + 0{,}4x_2 \geq 80 & \boxed{b} \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La regione delle soluzioni ammissibili sarà:



L'area ammissibile è la regione poligonale illimitata di vertici:

$$A(200; 0) \qquad B(133.33; 33.33) \qquad C(0; 200)$$

Si calcola ora il valore della funzione economica nei vertici di tale poligono:

$$z(A) = 4.000 \qquad z(B) = 3.500 \qquad z(C) = 5.000$$

La funzione economica è minima nel vertice $B(133.33; 33.33)$; perciò l'ottimo della funzione economica si ottiene miscelando 133,33 Kg di P_1 e 33,33 Kg di P_2.

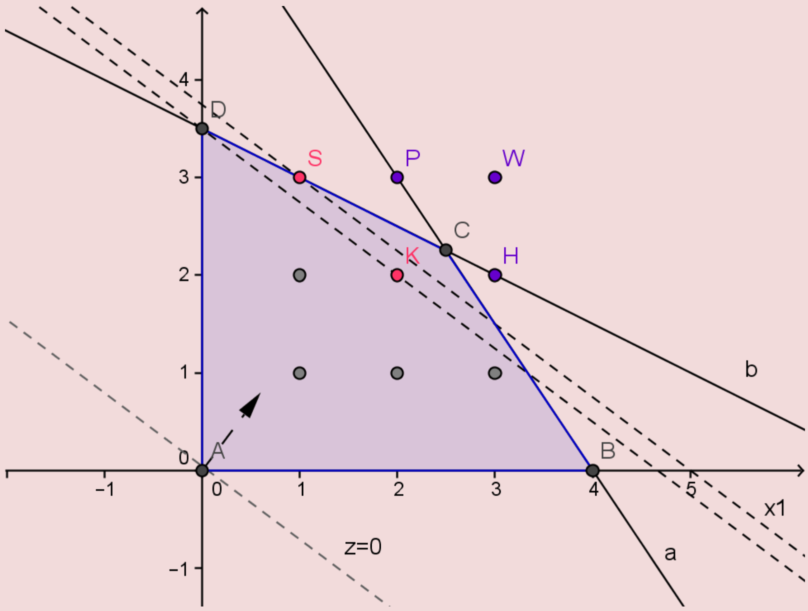
4. Un artigiano produce un articolo di due tipi: standard e di lusso. Per la produzione utilizza una macchina ed un operaio specializzato. Per il tipo standard occorrono 1,5 ore di lavoro della macchina e 0,5 ore di lavoro manuale; per il tipo di lusso occorrono 1 ora di lavoro della macchina e 1 ora di lavoro manuale. Ogni giorno sono disponibili 6 ore di lavoro della macchina e 3,5 ore di lavoro manuale. Gli utili netti per l'artigiano sono: € 300 per ogni unità del tipo standard e € 400 per ogni unità del tipo di lusso. Stabilire quante unità di ogni tipo deve produrre per massimizzare l'utile.

Indicate con x_1 e x_2 il numero (intero) di unità da produrre del modello standard e del modello di lusso, il modello matematico sarà:

$$z = 300x_1 + 400x_2 \quad da\ massimizzare$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + x_2 \leq 6 & \boxed{a} \\ 0{,}5x_1 + x_2 \leq 3{,}5 & \boxed{b} \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 \in \aleph \end{cases}$$

La regione delle soluzioni ammissibili sarà:



L'area ammissibile è data dal poligono di vertici $ABCD$, con:

$$A \equiv O(0;0) \quad B(4;0) \quad C\left(\frac{5}{2};\frac{9}{4}\right) \quad D\left(0;\frac{7}{2}\right)$$

Il valore della funzione economica nei vertici di tale poligono è:

$$z(A) = 0 \quad z(B) = 1.200 \quad z(C) = 1.650 \quad z(D) = 1.400$$

La funzione economica è massima nel vertice $C\left(\frac{5}{2};\frac{9}{4}\right)$ che però non ha coordinate intere. I punti più vicini a C, ma con coordinate intere sono:

$$P(2;3) \quad W(3;3) \quad H(3;2) \quad K(2;2)$$

Di questi solo $K(2;2)$ appartiene alla regione ammissibile e $z(K) = 1.400$.

Ma osservando le linee di livello (tratteggiate in figura), si nota che il massimo si ha in $S(1;3)$ e

$z(S) = 1.500$. In conclusione: l'utile massimo di € 1.500 si ottiene producendo una unità di tipo standard e 3 unità del tipo di lusso.

3. PROBLEMI DI P.L. IN TRE O PIU' VARIABILI RISOLUBILI CON METODO GRAFICO

Un problema di P.L. in n variabili è riconducibile ad un problema di P.L. in due variabili e quindi risolubile per via grafica, se nel sistema dei vincoli compaiono $n-2$ equazioni da cui ricavare $n-2$ variabili in funzione delle restanti due.

ESEMPI

1. Un'industria artigiana di divani ha ricevuto un'ordinazione per 100 divani. Può produrne di tre tipi che richiedono la stessa materia prima, ma che si differenziano per la lavorazione su una macchina e per la rifinitura manuale. I tempi (in ore) impiegati per ciascun tipo, le ore disponibili e i prezzi di vendita sono elencati nella seguente tabella:

	D_1	D_2	D_3	ore disponibili
tempo macchina	5	4	2	440
tempo rifinitura manuale	10	8	12	1.080
prezzi di vendita (in euro)	300	210	240	

Determinare la combinazione produttiva che consente il massimo utile.

Indicati con x_1, x_2 e x_3 il numero di divani dei tre modelli da produrre, il modello matematico è:

$$z = 300x_1 + 210x_2 + 240x_3 \qquad \textit{da massimizzare}$$

con i vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 440 \\ 10x_1 + 8x_2 + 12x_3 \le 1.080 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Dal primo vincolo si ricava un'incognita e la si sostituisce nel modello matematico, vincolo di segno compreso:

$$x_3 = 100 - x_1 - x_2$$

quindi:

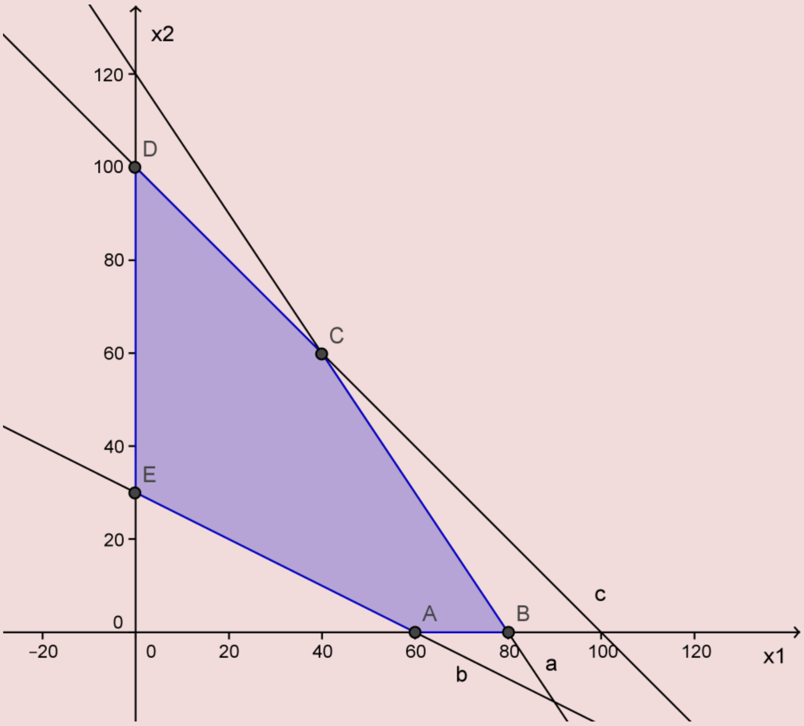
$$z = 300x_1 + 210x_2 + 240(100 - x_1 - x_2)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 2(100 - x_1 - x_2) \le 440 \\ 10x_1 + 8x_2 + 12(100 - x_1 - x_2) \le 1.080 \\ 100 - x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Risolvendo i possibili calcoli si ottiene un problema in due variabili:

$$z = 60x_1 - 30x_2 + 24.000 \quad da\ massimizzare$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 120 \\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La regione delle soluzioni ammissibili è:



I vertici sono:

$$A(60;0) \quad B(80;0) \quad C(40;60) \quad D(0;100) \quad E(0;30)$$

Il valore della funzione economica nei vertici è:

$$z(A) = 27.600 \quad z(B) = 28.800 \quad z(C) = 24.600 \quad z(D) = 21.000 \quad z(E) = 23.100$$

Quindi il massimo della funzione economica si ha nel punto $B(80;0)$. Concludendo: il massimo utile di € 28.800 si ottiene producendo 80 divani di tipo 1, nessun divano di tipo 2 e 20 divani di tipo 3.

2. Un allevatore vuole preparare un mangime per i suoi animali in modo che in ogni chilogrammo di miscela vi sia almeno il 10,5% di zuccheri, almeno il 12% di proteine ed almeno il 9% di grassi. In commercio si trovano tre prodotti che rispetto a zuccheri, proteine e grassi presentano le composizioni date nella seguente tabella:

contenuto (%)	P_1	P_2	P_3	valori minimi (%)
zuccheri	10	12,5	10	10,5
proteine	15	-	20	12
grassi	5	15	10	9
costi (in euro al Kg)	8	7	10	

Determinare come l'allevatore deve miscelare i tre prodotti per avere un composto di minimo costo.

Indicati con x_1, x_2 e x_3 le quantità dei tre prodotti per formare un chilogrammo di miscela, il modello matematico è:

$$z = 8x_1 + 7x_2 + 10x_3 \qquad \textit{da minimizzare}$$

con i vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}125x_2 + 0{,}1x_3 \geq 0{,}105 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}2x_3 \geq 0{,}12 \\ 0{,}05x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}1x_3 \geq 0{,}09 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Dal primo vincolo si ricava un'incognita e la si sostituisce nel modello matematico, vincolo di segno compreso:

$$x_2 = 1 - x_1 - x_3$$

quindi:

$$z = 8x_1 + 7(1 - x_1 - x_3) + 10x_3$$

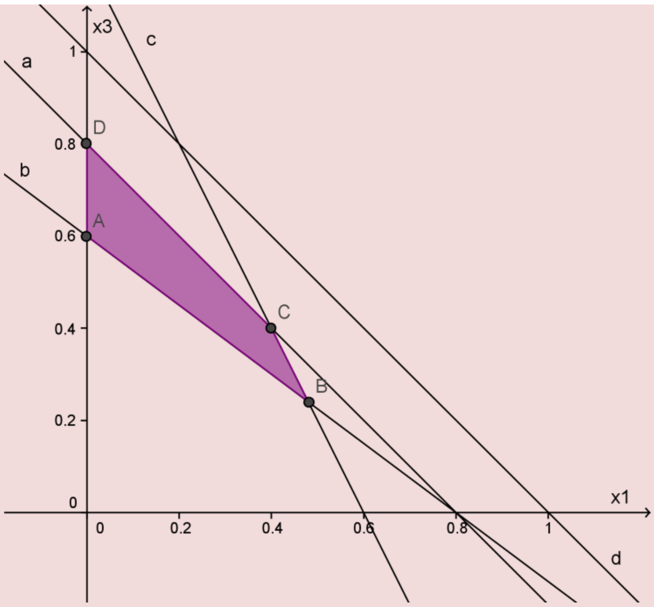
$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}125(1 - x_1 - x_3) + 0{,}1x_3 \geq 0{,}105 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}2x_3 \geq 0{,}12 \\ 0{,}05x_1 + 0{,}15(1 - x_1 - x_3) + 0{,}1x_3 \geq 0{,}09 \\ 1 - x_1 - x_3 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo i possibili calcoli si ottiene un problema in due variabili:

$$z = x_1 + 3x_3 + 7 \qquad \textit{da minimizzare}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_3 \leq 4 \\ 15x_1 + 20x_3 \geq 12 \\ 10x_1 + 5x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

La regione delle soluzioni ammissibili è:



I vertici sono:

$$A(0;0{,}6) \quad B(0{,}48;0{,}24) \quad C(0{,}4;0{,}4) \quad D(0;0{,}8)$$

Il valore della funzione economica nei vertici è:

$$z(A) = 8{,}8 \quad z(B) = 8{,}2 \quad z(C) = 8{,}6 \quad z(D) = 9{,}4$$

Quindi il minimo costo di € 8,2 al Kg, si ottiene miscelando il 48% di P_1, il 28% di P_2 ed il 24% di P_3.

3. Gli stabilimenti O_1 e O_2 producono, rispettivamente, 600 q e 1.000 q di merce che viene inviata ai depositi D_1, D_2 e D_3 aventi, rispettivamente, capienza di 400 q, 300 q e 900 q. Data la seguente tabella dei costi di trasporto per quintale in euro:

	D_1	D_2	D_3
O_1	20	30	40
O_2	32	26	24

determinare il piano di trasporto ottimo.

Indicate con x_1, x_2 e x_3 le quantità prodotte in O_1 ed inviate ai tre depositi e con y_1, y_2 e y_3 le quantità prodotte in O_2 ed inviate ai tre depositi, il problema è un problema di P.L. in 6 variabili in cui i vincoli sono dati dalle quantità prodotte dagli stabilimenti e dalle capacità dei tre depositie la funzione economica è il costo totale da minimizzare. Quindi il modello matematico è:

$$z = 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 32y_1 + 26y_2 + 24y_3 \qquad da\ minimizzare$$

con i vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 600 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1.000 \\ x_1 + y_1 = 400 \\ x_2 + y_2 = 300 \\ x_3 + y_3 = 900 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \\ y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Si ricavano 4 incognite in funzione delle altre due

$$y_1 = 400 - x_1 \qquad y_2 = 300 - x_2 \qquad x_3 = 600 - x_1 - x_2$$

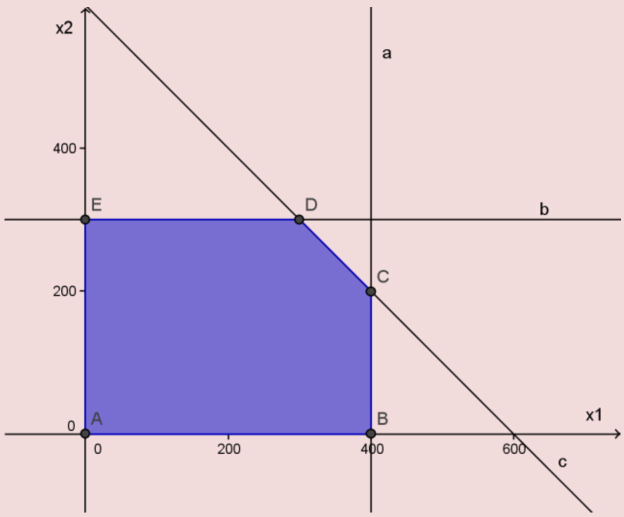
$$y_3 = 900 - x_3 = 900 - (600 - x_1 - x_2) = 300 + x_1 + x_2$$

e si sostituiscono nel modello matematico, vincolo di segno compreso; dopo aver fatto tutti i calcoli si ottiene:

$$z = 51.800 - 28x_1 - 12x_2 \qquad da\ minimizzare$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 400 \\ x_2 \leq 300 \\ x_1 + x_2 \leq 600 \\ 300 + x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La regione delle soluzioni ammissibili è:



I vertici sono:

$$A \equiv (0; 0) \quad B(400; 0) \quad C(400; 200) \quad D(300; 300) \quad E(0; 300)$$

Il valore della funzione economica nei vertici è:

$$z(A) = 51.800 \quad z(B) = 40.600 \quad z(C) = 38.200 \quad z(D) = 39.800 \quad z(E) = 48.200$$

Quindi il minimo costo di € 38.200 si ottiene trasportando da O_1: 400 q verso D_1; 200 q verso D_2; 0 q verso D_3 e da O_2: 0 q verso D_1; 100 q verso D_2; 900 q verso D_3.