CAPITOLO 5

LA RETTA NEL PIANO CARTESIANO

1. L'EQUAZIONE DELLA RETTA

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, una retta è rappresentata analiticamente da un'equazione lineare del tipo $ax + by + c = 0$, con a, b, c numeri reali, detta **equazione implicita** della retta. Per esplicitare tale equazione è necessario ricavare la variabile y, isolandola e dividendo entrambi i membri per b, che deve essere diverso da zero. Quindi:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \qquad \text{con} \quad b \neq 0$$

Si indichino poi

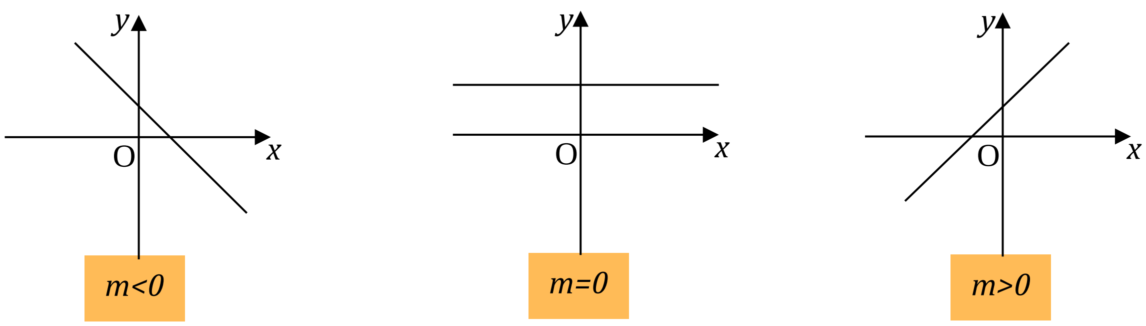
$$-\frac{a}{b} = m \qquad \text{e} \qquad -\frac{c}{b} = q$$

in modo che l'equazione si possa scrivere nella sua forma **esplicita**

$$y = mx + q$$

che rappresenta tutte le rette del piano tranne quelle parallele all'asse y a causa della condizione $b \neq 0$ che è stata posta.

Il numero reale m è detto **coefficiente angolare** della retta e rappresenta l'inclinazione (o pendenza) della retta, perciò si hanno i seguenti casi:

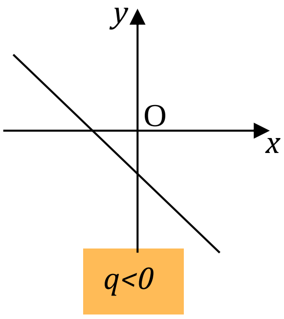


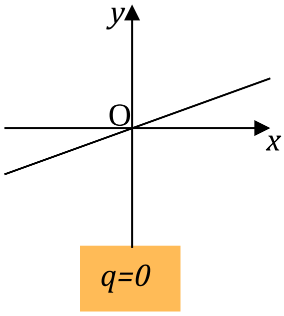
Il numero reale q è detto **ordinata all'origine** della retta e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y, quindi si presentano i seguenti casi:

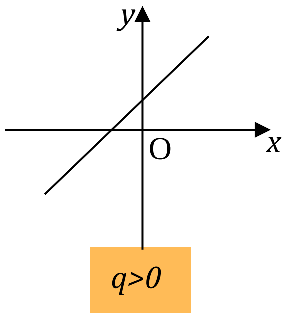
- se q>0: la retta interseca l'asse positivo delle ordinate;
- se q<0: la retta interseca l'asse negativo delle ordinate;
- se q=0: la retta passa per l'origine degli assi;

tutto ciò indipendentemente dall'inclinazione della retta, cioè dal suo coefficiente angolare.

Graficamente:







Quindi:

- le **rette passanti per l'origine** degli assi avranno equazione generica del tipo:

$$y = mx$$

- le **rette parallele all'asse x** avranno equazione generica del tipo:

$$y = q$$

Manca da definire l'equazione generica delle rette parallele all'asse y, che, si ricorda, sono state escluse dalla condizione $b \neq 0$ posta per poter esplicitare l'equazione della retta.

Sia quindi ora $b = 0$. Sostituendo nell'equazione implicita della retta tale valore si ottiene:

$$ax + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = -\frac{c}{a}$$

indicato $-\frac{c}{a} = k$ si ricava l'equazione generica di una retta parallela all'asse y:

$$x = k$$

Casi particolari:

Come conseguenza di quanto detto sopra, si deduce che:

- l'equazione dell'asse x è: $y = 0$, infatti l'asse x è il luogo dei punti la cui ordinata è nulla;
- l'equazione dell'asse y è: $x = 0$, infatti l'asse y è il luogo dei punti la cui ascissa è nulla;
- l'equazione della bisettrice del I-III quadrante è: $y = x$, infatti è il luogo dei punti che hanno ascissa uguale all'ordinata;
- l'equazione della bisettrice del II-IV quadrante è: $y = -x$, infatti è il luogo dei punti che hanno ordinata uguale all'opposto dell'ascissa.

ESEMPI:

a) Si tracci il grafico della seguente retta di equazione:

$$r: \quad 2y - 4x + 1 = 0$$

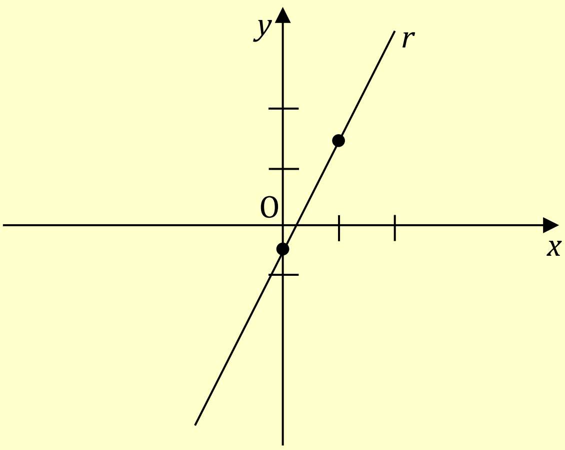
Per rappresentarla graficamente è necessario innanzi tutto esplicitarne l'equazione:

$$2y = 4x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = 2x - \frac{1}{2}$$

A questo punto si cercano due punti della retta sostituendo alla variabile x due valori reali e ricavandosi i valori corrispondenti della variabile y. Ad esempio: sia $x = 0$, sostituendo nell'equazione esplicita si ottiene $y = -\frac{1}{2}$; sia ora $x = 1$, sostituendo si ottiene $y = 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Questa operazione viene schematizzata più semplicemente in una tabella come indicato di seguito:

x	y
0	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{2}$

Quindi graficamente si disegnano i due punti trovati e si traccia la retta passante per essi:



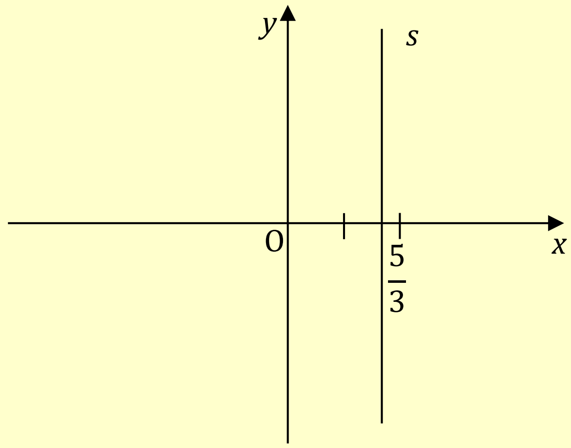
b) Si tracci il grafico della seguente retta di equazione:

$$s\colon\ 3x - 5 = 0$$

Non essendo presente la variabile y si esplicita rispetto alla variabile x:

$$x = \frac{5}{3}$$

quindi abbiamo a che fare con una retta parallela all'asse y. Graficamente:



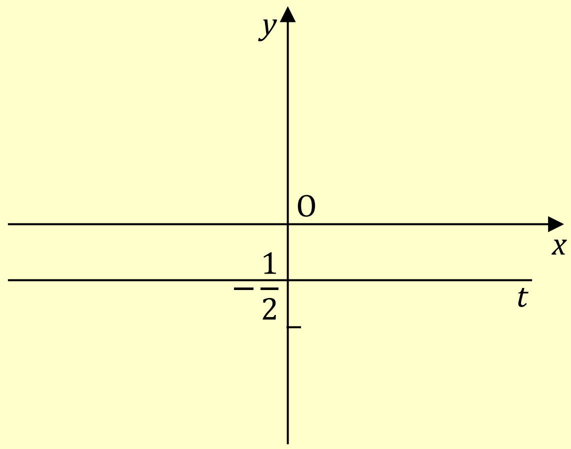
c) Si tracci il grafico della seguente retta di equazione:

$$t: \quad 4y + 2 = 0$$

Esplicitando rispetto alla variabile y si ottiene:

$$y = -\frac{1}{2}$$

che è l'equazione di una retta parallela all'asse x in quanto $m=0$. Graficamente:



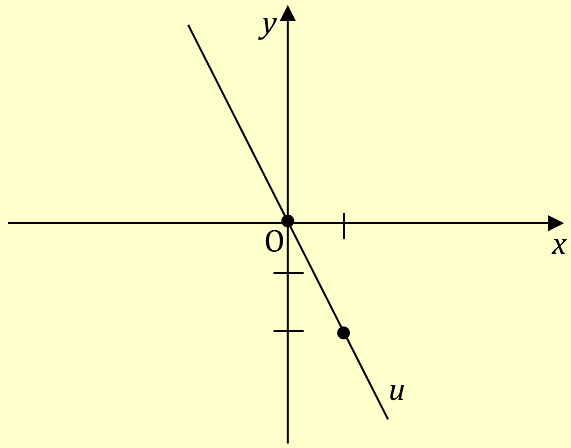
d) Si tracci il grafico della seguente retta di equazione:

$$u: \quad 3y + 6x = 0$$

Esplicitando si ottiene: $y = -2x$. Dal momento che manca l'ordinata all'origine, la retta passa per l'origine degli assi. Quindi basta trovare un solo altro punto della retta per poterla disegnare.

x	y
1	-2

Graficamente:



Rette parallele

Due rette r ed s sono **parallele** se hanno la stessa inclinazione, cioè lo stesso coefficiente angolare, quindi se

$$m_r = m_s$$

Rette perpendicolari

Due rette r ed s sono **perpendicolari** se i loro coefficienti angolari sono l'uno l'opposto del reciproco dell'altro, quindi se

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

ESEMPI:

a) Stabilire se le rette r ed s sono parallele o perpendicolari, date:

$$r: \ 2x - 3y + 4 = 0 \qquad s: \ 6y - 4x + 1 = 0$$

Troviamo i coefficienti angolari delle due rette esplicitandole:

$$r: \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \qquad m_r = \frac{2}{3}$$

$$s: \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \qquad m_s = \frac{2}{3}$$

Ed essendo $m_r = m_s$, le rette sono parallele.

b) Stabilire se le rette r ed s sono parallele o perpendicolari, date:

$$r: \; 3x - y + 2 = 0 \qquad\qquad s: \; 6y - 2x - 3 = 0$$

Troviamo i coefficienti angolari delle due rette esplicitandole:

$$r: \quad y = 3x + 2 \qquad \Rightarrow \qquad m_r = 3$$

$$s: \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m_s = \frac{1}{3}$$

Essendo i coefficienti diversi, le rette NON sono parallele. I coefficienti sono sì uno il reciproco dell’altro, ma non l’opposto del reciproco e quindi le rette NON sono nemmeno perpendicolari. Le rette sono quindi semplicemente incidenti.

c) Stabilire se le rette r ed s sono parallele o perpendicolari, date:

$$r: \; x + 2y - 3 = 0 \qquad\qquad s: \; 3y - 6x + 2 = 0$$

Troviamo i coefficienti angolari delle due rette esplicitandole:

$$r: \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m_r = -\frac{1}{2}$$

$$s: \quad y = 2x - \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad m_s = 2$$

Ed essendo $m_r = -{}^{1}/_{m_s}$, le rette sono perpendicolari.

2. EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

Dati due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, si vuole trovare l’equazione della retta AB che, a causa delle condizioni poste, non è parallela a nessuno dei due assi cartesiani.

Presa quindi l’equazione generica della retta in forma esplicita, sostituite le coordinate dei due punti dati e risolto il sistema così ottenuto, si ottiene la formula per trovare l’equazione della retta passante per i due punti dati. Analiticamente:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

ESEMPI:

a) Trovare l'equazione della retta passante per i punti $A(1,-3)$ e $B(-2,4)$.

Utilizzando la formula evidenziata sopra:

$$\frac{y-(-3)}{4-(-3)}=\frac{x-1}{-2-1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y+3}{7}=\frac{x-1}{-3}$$

facendo il minimo comune multiplo si ottiene:

$$3y+9=-7x+7 \qquad \Rightarrow \qquad 7x+3y+2=0$$

Che è l'equazione della retta richiesta in forma implicita.

b) Verificare se i tre punti $A(1,2)$, $B(-1,-1)$ e $C(5,8)$ sono allineati.

Per risolvere tale quesito si trova dapprima la retta passante per due dei tre punti e poi si verifica se il terzo punto appartiene o meno a tale retta. In questo caso, procediamo col calcolare l'equazione della retta passante, ad esempio, per A e B:

$$\frac{y-2}{-1-2}=\frac{x-1}{-1-1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y-2}{-3}=\frac{x-1}{-2}$$

da cui: $\qquad 2y-3x-1=0$

Ora verifichiamo se C appartiene alla retta AB. Si sostituiscono le coordinate di C nell'equazione di AB e si ottiene:

$$2\cdot 8-3\cdot 5-1=0 \qquad \Rightarrow \qquad 0=0$$

Poiché si è ottenuta un'identità, il punto C appartiene alla retta AB. (In caso contrario non sarebbe appartenuto alla retta.)

3. EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER UN PUNTO E NOTO IL COEFFICIENTE ANGOLARE

Dato un punto $A(x_0,y_0)$ ed un numero reale $m\neq 0$ si vuole trovare l'equazione della retta passante per A e di coefficiente angolare m.

Presa quindi l'equazione generica della retta in forma esplicita, sostituite le coordinate del punto dato e trovato q dall'equazione così ottenuta, si ottiene la formula per trovare l'equazione della retta passante per il punto dato noto il suo coefficiente angolare. Analiticamente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ESEMPI:

a) Trovare l'equazione della retta passante per il punto $A(-1,2)$ e di coefficiente angolare 4.

Applicando la formula sopra citata:

$$y - 2 = 4\big(x - (-1)\big) \qquad \Rightarrow \qquad y - 2 = 4(x + 1)$$

da cui si ottiene l'equazione richiesta:

$$y = 4x + 6$$

b) Trovare l'equazione della retta passante per il punto $P(3,5)$ e parallela alla bisettrice del II-IV quadrante.

La bisettrice del II-IV quadrante ha equazione $y = -x$ come visto nei paragrafi precedenti, quindi il suo coefficiente angolare è $m = -1$.

A questo punto dobbiamo trovare l'equazione di una retta conoscendo un suo punto ed il suo coefficiente angolare, perciò applicando la formula:

$$y - 5 = -1(x - 3) \qquad \Rightarrow \qquad y = -x + 8$$

c) Trovare l'equazione della retta passante per il punto $P(-3,-1)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $4x - 3y + 1 = 0$.

Per prima cosa esplicitiamo la retta r per ricavarne il suo coefficiente angolare:

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad m_r = \frac{4}{3}$$

poi, siccome la retta richiesta deve essere perpendicolare alla retta r il suo coefficiente angolare sarà l'opposto del reciproco di quello della retta r

$$m = -\frac{3}{4}$$

Ora ricaviamo la retta passante per P con coefficiente angolare $-\frac{3}{4}$:

$$y - (-1) = -\frac{3}{4}\big(x - (-3)\big) \qquad \Rightarrow \qquad y + 1 = -\frac{3}{4}(x + 3)$$

da cui: $$4y + 3x + 13 = 0$$

4. POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE

Abbiamo già analizzato, nel paragrafo 1, le condizioni cui devono soddisfare due rette per essere parallele o perpendicolari. Si vogliono ora trovare, se esistono, i punti di intersezione di due rette di equazioni assegnate. Per far questo è necessario risolvere il sistema lineare tra le equazioni delle due rette.

Si possono presentare i seguenti casi:

1. Sistema determinato $\Rightarrow$ esiste un punto di intersezione tra le due rette che quindi sono **incidenti** (perpendicolari o non perpendicolari)

2. Sistema impossibile $\Rightarrow$ non esistono punti di intersezione tra le due rette che quindi sono **parallele**

3. Sistema indeterminato $\Rightarrow$ esistono infiniti punti di intersezione tra le due rette che quindi sono **coincidenti** (cioè sovrapposte)

ESEMPI:

a) Qual è la posizione reciproca delle due rette $2x + y - 1 = 0$ e $-3x - 2y + 3 = 0$?

Si imposta il sistema tra le equazioni delle due rette e lo si risolve:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ -3x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

col metodo di sostituzione si ottiene:

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ -3x - 2(-2x + 1) + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 1 \\ -3x + 4x - 2 + 3 = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Quindi le due rette sono incidenti nel punto $P(-1, 3)$, ma non sono perpendicolari poiché $m_1 = -2$ e $m_2 = -{}^{3}/_{2}$, che non sono l'uno l'opposto del reciproco dell'altro.

b) Qual è la posizione reciproca delle due rette $-x + 2y - 3 = 0$ e $2x - 4y + 1 = 0$?

Si imposta il sistema tra le equazioni delle due rette e lo si risolve:

$$\begin{cases} -x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

col metodo di sostituzione si ottiene:

$$\begin{cases} x = 2y - 3 \\ 2(2y - 3) - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 \\ 4y - 6 - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 \\ 0 = 5 \end{cases}$$

che è impossibile, quindi le due rette sono parallele, non avendo punti in comune. Questo sarebbe stato dimostrabile anche confrontando i coefficienti angolari.

c) Qual è la posizione reciproca delle due rette $4x - y + 2 = 0$ e $3y - 12x - 6 = 0$?

Si imposta il sistema tra le equazioni delle due rette e lo si risolve:

$$\begin{cases} 4x - y + 2 = 0 \\ 3y - 12x - 6 = 0 \end{cases}$$

col metodo di sostituzione si ottiene:

$$\begin{cases} y = 4x + 2 \\ 3(4x + 2) - 12x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 2 \\ 12x + 6 - 12x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

che è indeterminato, quindi le due rette sono coincidenti.

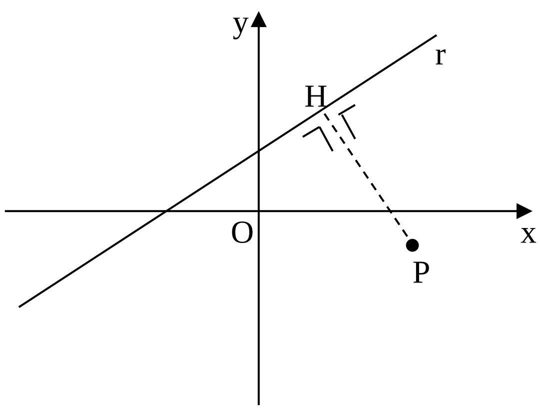
5. DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

Si consideri una retta r di equazione assegnata in forma <u>implicita</u> $ax + by + c = 0$ e sia dato un punto $P(x_0, y_0)$. La distanza del punto P dalla retta r è la lunghezza del segmento avente per estremi il punto P stesso ed il piede della perpendicolare condotta da P alla retta r.

Omettendo la dimostrazione, si trova:

$$d(P; r) = \overline{PH} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Graficamente:



ESEMPI:

a) Si calcoli la distanza del punto $P(-1,3)$ dalla retta r di equazione $y = 2x + 4$.

Per prima cosa è necessario rendere l'equazione della retta in forma implicita:

$$y - 2x - 4 = 0$$

Poi si applica la formula:

$$d(P;r) = \frac{|3 - 2 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{(-2)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

b) Calcolare l'area del triangolo di vertici $A(-1,-2)$, $B(5,2)$ e $C(0,4)$.

Calcoliamo dapprima la base $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

L'altezza $\overline{CH}$ è la distanza del vertice C dalla retta AB; quindi si deve calcolare l'equazione implicita della retta AB, come retta passante per due punti:

$$\frac{y-(-2)}{2-(-2)} = \frac{x-(-1)}{5-(-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{y+2}{4} = \frac{x+1}{6} \quad \Rightarrow \quad 3y - 2x + 4 = 0$$

Ed ora:

$$\overline{CH} = \frac{|3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{(-2)^2 + (3)^2}} = \frac{16}{\sqrt{13}}$$

Quindi l'area sarà:

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{2\sqrt{13} \cdot \frac{16}{\sqrt{13}}}{2} = 16$$