

3. ESERCIZI

EQUAZIONI IRRAZIONALI

Risolvi le seguenti equazioni:

LIVELLO BASE

1. $\sqrt{x} - \sqrt{7} = 0$ $S = \{7\}$
2. $\sqrt[3]{x} - x = 0$ $S = \{\pm 1; 0\}$
3. $5 - \sqrt{3x + 1} = 0$ $S = \{8\}$
4. $3\sqrt{x} = -12$ $S = \{\emptyset\}$
5. $\sqrt{4x - 1} = 5$ $S = \left\{\frac{13}{2}\right\}$
6. $9x = \sqrt{x}$ $S = \left\{0; \frac{1}{81}\right\}$
7. $\sqrt{4 + 2x^2} = 0$ $S = \{\emptyset\}$
8. $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 0$ $S = \{-1\}$
9. $\sqrt{5 + x^2} = 1$ $S = \{\emptyset\}$
10. $7 - \sqrt{x + 5} = 0$ $S = \{44\}$
11. $\sqrt[3]{2x - 1} - 5 = 0$ $S = \{63\}$
12. $5 - \sqrt{4x^2 - 2} = 0$ $S = \left\{\pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\right\}$
13. $1 + \sqrt[5]{2 - 5x} = 0$ $S = \left\{\frac{3}{5}\right\}$
14. $\sqrt{3x} - 4 = 2$ $S = \{12\}$
15. $\sqrt{10} = \sqrt{x - 3}$ $S = \{13\}$
16. $5\sqrt{x} - 4 = 4\sqrt{x} - 1$ $S = \{9\}$

$$17. \quad 6(\sqrt{3x} - 1) = 6 + 2\sqrt{12x} \quad S = \{12\}$$

$$18. \quad 1 + 2\sqrt{5x} = \frac{3}{2}\sqrt{20x} - 1 \quad S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$$

$$19. \quad 2(\sqrt[3]{3x} - 3) = \sqrt[3]{81x} - 8 \quad S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$$

$$20. \quad \sqrt[4]{5x + 16} - 3 = 0 \quad S = \{13\}$$

LIVELLO INTERMEDIO

$$21. \quad \sqrt[3]{3x - 1} = x - 1 \quad S = \{0; 3\}$$

$$22. \quad x + 2 + \sqrt{4x + 4} = 100 \quad S = \{80\}$$

$$23. \quad x - \sqrt{2x - 1} = 0 \quad S = \{1\}$$

$$24. \quad \sqrt{x} - 20 = -x \quad S = \{16\}$$

$$25. \quad \sqrt{x - 1} + x - 3 = 0 \quad S = \{2\}$$

$$26. \quad 4 + 2x = 3x - 4\sqrt{x - 7} \quad S = \{8; 16\}$$

$$27. \quad \sqrt{4 - 5x} = x - 2 \quad S = \{\emptyset\}$$

$$28. \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 7} - 2x - 1 = 0 \quad S = \{2\}$$

$$29. \quad \sqrt[3]{x^3 + 7} - 1 = x \quad S = \{-2; 1\}$$

$$30. \quad \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} - \frac{3}{2} = 0 \quad S = \{7\}$$

$$31. \quad \sqrt{2x^2 - 8x + 9} = 3x - 4 \quad S = \left\{\frac{8 + \sqrt{15}}{7}\right\}$$

$$32. \quad 5 - \sqrt{25 - x^2} + x = 0 \quad S = \{-5; 0\}$$

$$33. \quad x + 15 = 2\sqrt{x^2 - 4x - 33} \quad S = \left\{-\frac{17}{3}; 21\right\}$$

34. $\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x-2}} = 2$ $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
35. $\sqrt{x^2+4} = x-2$ $S = \{\emptyset\}$
36. $\sqrt{x-x^2-6} = 2x-3$ $S = \{\emptyset\}$
37. $\sqrt[3]{3x^2} - \sqrt[3]{2x+1} = 0$ $S = \left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$
38. $\sqrt{x - \frac{3}{4}} - \sqrt{3x} = 0$ $S = \{\emptyset\}$
39. $\sqrt{5x+8} - \sqrt{3x+1} = 0$ $S = \{\emptyset\}$
40. $\sqrt{6x+4} - \sqrt{x^2+2x-8} = 0$ $S = \{6\}$
41. $\sqrt{x^2-3x} = -\sqrt{2x-6}$ $S = \{3\}$
42. $5\sqrt{x-1} - 5 = x$ $S = \{5; 10\}$
43. $\sqrt{(x+5)(x-1)} = 3x-5$ $S = \{3\}$
44. $1-x + \sqrt[3]{x^3-1} = 0$ $S = \{0; 1\}$
45. $x\sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{-x^3-2x}$ $S = \{0; -\sqrt[3]{2}\}$
46. $\sqrt{x-2} - \sqrt{4x} = 0$ $S = \{\emptyset\}$
47. $\frac{\sqrt{6x-1}}{\sqrt{1-x}} - \frac{3}{4} = 0$ $S = \left\{\frac{5}{21}\right\}$
48. $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3x}}} = 3$ $S = \{3\}$
49. $\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-10x+15}$ $S = \{9\}$
50. $\frac{\sqrt{63x+3}}{1-\sqrt{7x}} + 4 = 0$ $S = \{7\}$

$$51. \quad \frac{3\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = 0 \qquad S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

LIVELLO AVANZATO

$$52. \quad \sqrt{x^2 + 2} - x^2 = -2 \qquad S = \left\{\pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{2}}\right\}$$

$$53. \quad x - 3 + \sqrt{\frac{x+3}{2-x}} = 0 \qquad S = \{1\}$$

$$54. \quad \sqrt{x-7} - \frac{3}{\sqrt{x-7}} = 0 \qquad S = \{10\}$$

$$55. \quad \frac{\sqrt{6x} - 2x}{5} = \frac{1}{\sqrt{6x} + 2x} \qquad S = \{\emptyset\}$$

$$56. \quad x \sqrt{\frac{x+4}{6-x}} - 1 = 0 \qquad S = \{1\}$$

$$57. \quad \sqrt{x+3} - 2 = \sqrt{x-5} \qquad S = \{6\}$$

$$58. \quad 2\sqrt{2-x} = x - \sqrt{x^2 + 8} \qquad S = \{\emptyset\}$$

$$59. \quad \sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad S = \left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$$

$$60. \quad \sqrt{x} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x + 2}} \qquad S = \{\emptyset\}$$

Risolvi i seguenti problemi contenenti equazioni irrazionali:

$$61. \quad \text{Aggiungendo 2 al doppio della radice quadrata di un numero si ottiene 4. Trova il numero.} \qquad S = \{1\}$$

$$62. \quad \text{Sottraendo 4 dal triplo della radice quadrata di un numero si ottiene 5. Trova il numero.} \qquad S = \{9\}$$

$$63. \quad \text{La radice quadrata di un numero non nullo è uguale al doppio del numero stesso. Qual è il}$$

numero?

$$S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$$

64. Due numeri sono tali che uno supera l'altro di 2 unità. La differenza tra la radice quadrata del numero maggiore e la radice quadrata del doppio del numero minore è uguale a 0. Trova i 2 numeri.

$$S = \{2; 4\}$$

65. La somma della radice quadrata di un numero e della radice quadrata del suo successivo è uguale a 2. Trova il numero.

$$S = \left\{ \frac{9}{16} \right\}$$

66. In un triangolo rettangolo ABC, il cateto AB supera di 1 cm la misura del cateto AC. Sapendo che il perimetro del triangolo è 12 cm, determina le lunghezze dei cateti.

$$S = \{3; 4\}$$

67. In un triangolo rettangolo ABC, le misure dei due cateti sono x e $x + 2$. Determina x sapendo che la misura del raggio del cerchio circoscritto al triangolo è 1.

$$S = \{\emptyset\}$$

68. Sulla diagonale BD di un quadrato ABCD di lato 6 cm, determina un punto P in modo che la somma delle sue distanze dal lato BC e dal vertice A sia 9 cm.

$$S = \{PB = 3(2\sqrt{3} - \sqrt{2})\}$$

69. Considera una semicirconferenza di diametro AB e raggio 6.5 cm. Determina, su tale semicirconferenza, un punto P in modo che risulti $\overline{AP} + \overline{PB} = 17$.

$$S = \{PB = 5 \text{ cm oppure } 12 \text{ cm}\}$$

70. In un trapezio isoscele ABCD, la base maggiore AB è lunga 6 cm e la base minore CD è lunga 4 cm. Determina la lunghezza del lato obliquo, in modo che, detti H e K le proiezioni di C e D sulla base maggiore, il perimetro del rettangolo HKCD sia 12 cm.

$$S = \{\sqrt{5}\}$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Risolvi le seguenti disequazioni:

LIVELLO BASE

71. $\sqrt{x+3} < 4$

$$S = \{-3 \leq x < 13\}$$

72. $\sqrt[3]{x^3 - 2x} < x$

$$S = \{x > 0\}$$

73. $3 - \sqrt[3]{2+x^2} > 0$

$$S = \{-5 < x < 5\}$$

74. $\sqrt{x^2 - 9} + 3 > 0$ $S = \{x \leq -3 \cup x \geq 3\}$
75. $\sqrt[3]{x^3 - 8} < x - 2$ $S = \{0 < x < 2\}$
76. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} > 2$ $S = \left\{-\frac{5}{3} < x < -1\right\}$
77. $\frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{2} > 0$ $S = \{x > 2\}$
78. $\sqrt[3]{x^3 - 8} \leq \sqrt[3]{x^3 + x - 2}$ $S = \{x \geq -6\}$
79. $\sqrt[4]{(x-2)^2} < -2$ $S = \{\nexists x \in \mathcal{R}\}$
80. $\sqrt[5]{2-x} < 1$ $S = \{x > 1\}$
81. $\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} < 1$ $S = \{x \leq -1 \cup x \geq 1\}$
82. $\sqrt[3]{x^3 - 9x^2} \geq x - 3$ $S = \{x \leq 1\}$
83. $\sqrt{x^2 - 4} < -3$ $S = \{\nexists x \in \mathcal{R}\}$
84. $\sqrt{3x+1} \geq 0$ $S = \left\{x \geq -\frac{1}{3}\right\}$
85. $\sqrt{-x^2 - 4} > 1$ $S = \{\nexists x \in \mathcal{R}\}$
86. $\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2-9}} \geq 1$ $S = \{x < -3 \cup x > 3\}$
87. $\sqrt[3]{x^2 + x + 1} > -3$ $S = \{\forall x \in \mathcal{R}\}$
88. $4\sqrt{x-3} \leq 3$ $S = \left\{3 \leq x \leq \frac{57}{16}\right\}$
89. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq 2$ $S = \{x \leq 0 \cup x \geq 4\}$
90. $\sqrt{x^2 + 2} \geq -3$ $S = \{\forall x \in \mathcal{R}\}$
91. $\sqrt{5} \leq \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ $S = \{x \leq 0 \cup x \geq 6\}$

$$92. \quad \frac{1}{4} \geq \sqrt{x-1}$$

$$S = \left\{ 1 \leq x \leq \frac{17}{16} \right\}$$

$$93. \quad \sqrt{\frac{x^2+4}{x^2-4}} \leq 1$$

$$S = \{ \nexists x \in \mathcal{R} \}$$

LIVELLO INTERMEDIO

$$94. \quad \sqrt{x^2-4} - 4 > x$$

$$S = \left\{ x < -\frac{5}{2} \right\}$$

$$95. \quad \sqrt{x^2-4x+3} < 1-x$$

$$S = \{ \nexists x \in \mathcal{R} \}$$

$$96. \quad \sqrt{x^2-8x+15} + 4 \geq x$$

$$S = \{ x \leq 3 \}$$

$$97. \quad \sqrt{x^2-5x} > 2x$$

$$S = \{ x < 0 \}$$

$$98. \quad \sqrt{5x+1} \leq \sqrt{x+4}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{4} \right\}$$

$$99. \quad x + \sqrt{x^2+4x+8} > 0$$

$$S = \{ x > -2 \}$$

$$100. \quad x - \frac{5}{2} < \sqrt{2x^2-5x+3}$$

$$S = \left\{ x \leq 1 \quad \cup \quad x \geq \frac{3}{2} \right\}$$

$$101. \quad \sqrt{4x^2+3x-1} + 3 - 2x \geq 0$$

$$S = \left\{ x \leq -1 \quad \cup \quad x \geq \frac{1}{4} \right\}$$

$$102. \quad \sqrt{x^2+4} > \sqrt{x^2+10}$$

$$S = \{ \nexists x \in \mathcal{R} \}$$

$$103. \quad \sqrt{x^2-4x+3} \leq 1-x$$

$$S = \{ x = 1 \}$$

$$104. \quad x > \sqrt{x^2-2x-3}$$

$$S = \{ x \geq 3 \}$$

$$105. \quad \sqrt{x-3} \leq \sqrt{4-x}$$

$$S = \left\{ 3 \leq x \leq \frac{7}{2} \right\}$$

$$106. \quad \sqrt{9-x^2} > x+3$$

$$S = \{ -3 < x < 0 \}$$

$$107. \quad \sqrt{5x-6} \leq 2x-3$$

$$S = \{ x \geq 3 \}$$

$$108. \quad \sqrt{4x-1} > \sqrt{-x+2}$$

$$S = \left\{ \frac{3}{5} < x \leq 2 \right\}$$

109. $\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-5} > 0$ $S = \left\{ \frac{5}{2} \leq x < 3 \right\}$
110. $1+x \geq \sqrt{x^2-x}$ $S = \left\{ -\frac{1}{3} \leq x \leq 0 \cup x \geq 1 \right\}$
111. $\sqrt{x^2-5x+6} > x-1$ $S = \left\{ x < \frac{5}{3} \right\}$
112. $\sqrt{x^2+3x+3} - x + 2 \leq 0$ $S = \{ \nexists x \in \mathcal{R} \}$
113. $x < \sqrt{2x^2-5x+3} + \frac{5}{2}$ $S = \left\{ x \leq 1 \cup x \geq \frac{3}{2} \right\}$
114. $3 \leq x + \sqrt{x^2-x-2}$ $S = \left\{ x \geq \frac{11}{5} \right\}$
115. $\sqrt{x^2-x} > x-2$ $S = \{ x \leq 0 \cup x \geq 1 \}$
116. $\sqrt{x-1} - 3 + x < 0$ $S = \{ 1 \leq x < 2 \}$
117. $\sqrt{x^2-4} \leq 4+x$ $S = \left\{ -\frac{5}{2} \leq x \leq -2 \cup x \geq 2 \right\}$
118. $1+x > \sqrt{x^2-2x}$ $S = \left\{ -\frac{1}{4} < x \leq 0 \cup x \geq 2 \right\}$
119. $\sqrt{x^2+5} \leq 4+x$ $S = \left\{ x \geq -\frac{11}{8} \right\}$
120. $\sqrt{9-x^2} \geq 2x+3$ $S = \{ -3 \leq x \leq 0 \}$
121. $\sqrt{x+x^2} - x < 2\sqrt{x+x^2} - 6$ $S = \left\{ x > \frac{36}{13} \right\}$
122. $1+x + \sqrt{3(x+2) - 2(2x-3) + 7} < 0$ $S = \{ x < -6 \}$
123. $\sqrt{4x^2-1} \leq (1-x)(1+x) - 1$ $S = \{ \nexists x \in \mathcal{R} \}$
124. $\frac{\sqrt{x+1}}{3} < \frac{\sqrt{1-x}}{2}$ $S = \left\{ -1 \leq x < \frac{5}{13} \right\}$
125. $\sqrt{\frac{x^2+x}{3}} \leq x+1$ $S = \{ x = -1 \cup x \geq 0 \}$

$$126. \quad \frac{x-4}{2} \leq \sqrt{-2x+1} \qquad S = \left\{x \leq \frac{1}{2}\right\}$$

LIVELLO AVANZATO

$$127. \quad \frac{2}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2} < 0 \qquad S = \left\{x > \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

$$128. \quad \sqrt{\frac{81x^3-3}{x+2}} < 9x+1 \qquad S = \left\{x \geq \frac{1}{3}\right\}$$

$$129. \quad \frac{3-2x+\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-1}+2} \leq 0 \qquad S = \{x \geq 2\}$$

$$130. \quad \frac{|x+2|}{\sqrt{x^2+x+1}} > 0 \qquad S = \{x \neq -2\}$$

$$131. \quad \frac{1-x^2}{3-x-\sqrt{x^2-2x}} \geq 0 \qquad S = \left\{-1 \leq x \leq 0 \cup x > \frac{9}{4}\right\}$$

$$132. \quad \frac{3-x}{\sqrt{x^2-1}-1} < 0 \qquad S = \{-\sqrt{2} < x \leq -1 \cup 1 \leq x < \sqrt{2} \cup x > 3\}$$

$$133. \quad \frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{|x+1|} \leq 0 \qquad S = \{x = -3\}$$

$$134. \quad \sqrt{2-|x|} > \sqrt{|x|+1} \qquad S = \left\{-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}$$

$$135. \quad 3\sqrt{|x-2|} < 4 \qquad S = \left\{\frac{2}{9} < x < \frac{34}{9}\right\}$$

$$136. \quad \sqrt{x^2+1} < 2-|x| \qquad S = \left\{-\frac{3}{4} < x < \frac{3}{4}\right\}$$

$$137. \quad \frac{|x|+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{|x^2-9x|}+\sqrt{|x-9|}} > 0 \qquad S = \{x \neq 9\}$$

$$138. \quad \sqrt[3]{1+x} < \sqrt{1-x} \qquad S = \{x < 0\}$$