CAPITOLO 3

ESPONENZIALI E LOGARITMI

1. POTENZE NEL CAMPO REALE

Potenze con esponente naturale

Si definisce potenza n-esima (con n numero naturale maggiore di 1) di un numero reale a e si scrive a^n il prodotto di n fattori uguali ad a, ossia

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \quad fattori} \quad a \in \Re \quad n \in \aleph - \{0;1\}$$

Casi particolari:

- $a^1 = a \qquad \forall a \in \Re$
- $1^x = 1 \qquad \forall x \in \Re$
- $a^0 = 1 \qquad \forall a \in \Re - \{0\}$
- $0^n = 0$ se $n \in \aleph - \{0\}$

In una potenza a^n il valore a si dice **base** della potenza ed il valore n **esponente** della potenza.

Osservazioni:

- Se $a \in \Re^+$ $\quad a^n$ positivo $\quad \forall n \in \aleph$
- Se $a = 0$ $\quad a^n = 0 \quad \forall n \in \aleph - \{0\}$
- Se $a \in \Re^-$ $\quad a^n$ risulta $\begin{cases} \text{Positivo se n è pari} \\ \text{Negativo se n è dispari} \end{cases}$
- Se $a = 1$ $\quad 1^n = 1 \quad \forall n \in \aleph$
- Se $a = -1$ $\quad (-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{se n pari} \\ -1 & \text{se n dispari} \end{cases}$

Proprietà delle potenze

1) Il prodotto di due o più potenze con ugual base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \forall a \in \Re - \{0\} \ \forall n, m \in \aleph$$

2) Il quoziente di due o più potenze con ugual base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il quoziente degli esponenti (supponendo $n \geq m$):

$$a^n : a^m = a^{n-m} \qquad \forall a \in \Re - \{0\}, \ \forall n, m \in \aleph, \ n \geq m$$

3) La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la base della potenza data e per esponente il prodotto degli esponenti:

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \qquad \forall a \in \Re - \{0\}, \ \forall n, m \in \aleph$$

4) La potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \forall a, b \in \Re - \{0\}, \ \forall n \in \aleph$$

5) La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze del dividendo e del divisore:

$$(a : b)^n = a^n : b^n \qquad \forall a, b \in \Re - \{0\}, \ \forall n \in \aleph$$

6) Potenze con esponente intero negativo:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \qquad a \in \Re - \{0\}, \ n \in \aleph - \{0\}$$

7) Potenze con esponente razionale:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a \in \Re^+, \ m \in \aleph, \ n \in \aleph - \{0\}$$

Osservazioni:

Sono definite:

$\left(-\sqrt{3}\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right) \cdot \left(-\sqrt{3}\right)$;

$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2}$;

$3^{-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3^{\sqrt{2}}}$.

Non sono definite:

$\left(-2^{\sqrt{3}}\right)$; 0^0 ; 0^{-3} .

2. FUNZIONE ESPONENZIALE

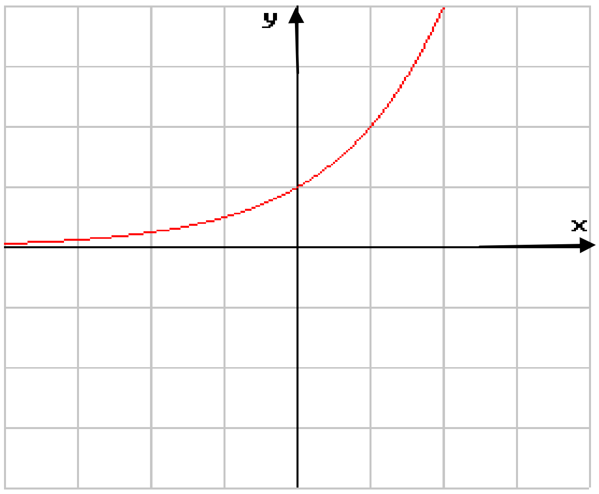
Definizione: si chiama **funzione esponenziale** ogni funzione in cui la variabile x è l'esponente di una potenza, cioè:

$$y = a^x \quad , \quad \text{con} \quad a > 0 \ \text{fissato e} \ x \in \Re$$

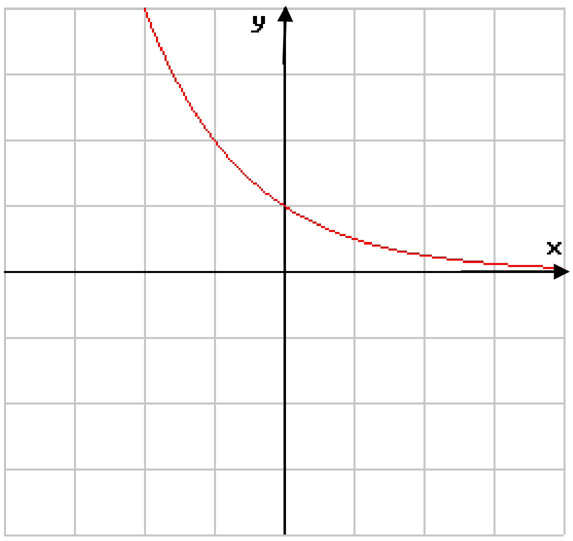
Il **dominio** della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è $D = \Re = (-\infty;+\infty)$; il **codominio**, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è $C = \Re^* = (0;+\infty)$ (la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva).

Si distinguono tre casi:

- $a > 1$: la funzione esponenziale è crescente, cioè se $x > y \Rightarrow a^x > a^y$



- $a = 1$: la funzione esponenziale è costante, cioè $a^x = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$
- $0 < a < 1$: la funzione esponenziale è decrescente, cioè $x > y \Rightarrow a^x < a^y$.



Osservazioni:

- Il grafico nel caso $0 < a < 1$ è il simmetrico rispetto all'asse y del grafico con $a > 1$; infatti $y = a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$. Pertanto, ogni curva esponenziale con base minore di 1 si può ottenere per simmetria da una curva esponenziale con base maggiore di 1.
- La funzione esponenziale è sempre positiva (infatti non esiste sotto l'asse x).
- La funzione esponenziale non è mai nulla (infatti non interseca mai l'asse x).
- L'asse *x* è un asintoto per $y = a^x$, qualunque sia il valore di *a*.
- La funzione esponenziale passa dal punto (0; 1) per qualunque valore di *a*, poiché $a^0 = 1$ $\forall a \in \Re - \{0\}$

3. LOGARITMI

Definizione: assegnato un numero a, reale positivo e diverso da 1, si chiama **logaritmo in base a di** un numero **b** reale positivo, l'esponente *x* da assegnare alla base a per ottenere il numero b e si scrive:

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$$

Il logaritmo risulta essere l'operazione inversa dell'esponenziale, pertanto le limitazioni cui è soggetto l'esponenziale si riflettono sul logaritmo: fissata la base *a*>0, deve essere *b*>0, inoltre valgono i **casi particolari**:

$\log_a 1 = 0$, poichè $a^0 = 1$

$\log_a a = 1$, poichè $a^1 = a$

Proprietà dei logaritmi

Analogamente, alle proprietà degli esponenziali precedentemente elencate corrispondono le seguenti proprietà dei logaritmi:

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (x \in \Re^+ \; ; \; y \in \Re^+, a > 0)$
2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (x \in \Re^+ \; ; \; y \in \Re^+, a > 0)$
3) $\log_a x^y = y \cdot \log x \quad (x \in \Re^+ \; ; \; y \in \Re, \; a > 0)$
4) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a, b, c > 0)$ formula di cambiamento di base nei logaritmi.

I logaritmi che compaiono sulle calcolatrici sono in base $a = 10$ oppure in base $a = e \approx 2{,}718$ in cui e è detto numero di Nepero, $Log\,x$ indica il $log_{10}\,x$, detto anche **logaritmo decimale**; $ln\,x$, indica il $log_e\,x$, detto anche **logaritmo naturale** o **neperiano**.

4. FUNZIONE LOGARITMICA

Si chiama **funzione logaritmica** ogni funzione del tipo:

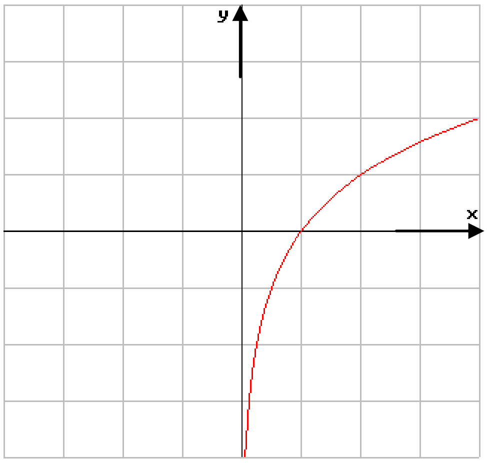
$$y = log_a\,x \quad , \quad \text{con } a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ fissato}, \quad x \in \mathbf{R}^+.$$

La funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, pertanto *dominio* e *codominio* risultano scambiati rispetto a quelli della funzione esponenziale.

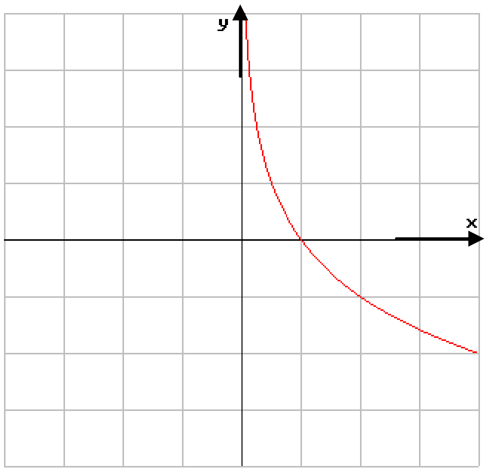
Il **dominio** della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è $D = \Re^+ = (0;+\infty)$; il **codominio**, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è $C = \Re = (-\infty;+\infty)$.

Si distinguono due casi:

- $a > 1$: la funzione logaritmica è crescente, cioè se $x > y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$

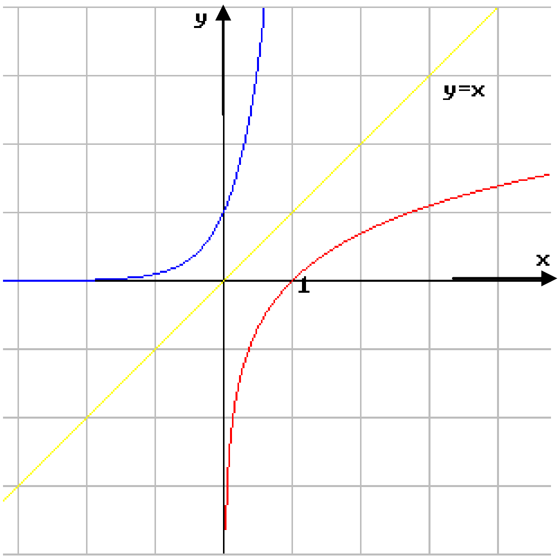


- $0 < a < 1$: la funzione logaritmica è decrescente, cioè se $x > y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$

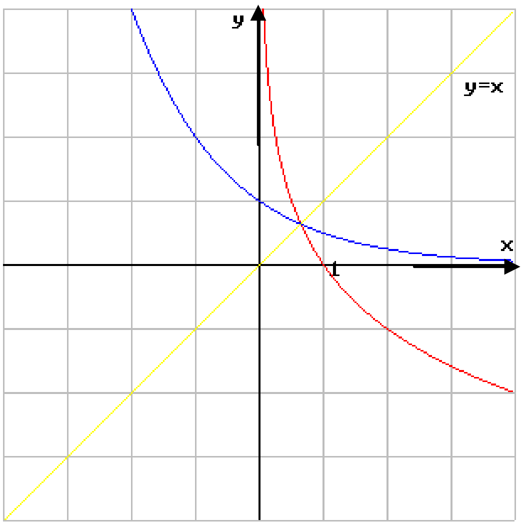


I grafici della funzione logaritmica si ottengono da quelli della funzione esponenziale per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ($y = x$) come si può vedere nei grafici seguenti:

- base $a > 1$



- **base** $0 < a < 1$



5. EQUAZIONI ESPONENZIALI

Un'equazione si dice **esponenziale** quando l'incognita compare nell'esponente di una o più potenze. L'equazione esponenziale più semplice (elementare) è del tipo:

$$a^x = b \text{ , con } a > 0 \text{ e } b > 0 \text{ ; } x \text{ è l'incognita dell'equazione}$$

Un'equazione esponenziale del tipo $a^x = b$ può essere impossibile, indeterminata o determinata:

$$\left.\begin{array}{l} b \leq 0 \\ b \neq 1 \;\; e \;\; a = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ equazione } \textbf{impossibile}$$

$$a = 1 \;\; e \;\; b = 1 \quad \Rightarrow \text{ equazione } \textbf{indeterminata}$$

$$a > 0,\;\; a \neq 1 \;\; e \;\; b > 0 \quad \Rightarrow \text{ equazione } \textbf{determinata}$$

ESEMPI:

a) Risolvi l'equazione: $2^x = -3$

E' impossibile: un'esponenziale non può mai essere negativo.

b) Risolvi l'equazione: $1^x = 5$

E' impossibile: una potenza di 1 sarà sempre uguale a 1.

c) Risolvi l'equazione: $1^x = 1$

E' indeterminata: qualunque valore di x soddisfa l'equazione data.

d) Risolvi l'equazione: $3^x = 9$

E' determinata: x = 2, infatti $3^2 = 9$

Tipi di equazioni esponenziali

1) Equazioni esponenziali in cui compaiono solo potenze, prodotti e quozienti di potenze con ugual base, che si possono ricondurre alla forma

$$\boldsymbol{a^{f(x)} = a^{g(x)}} \quad \textbf{con} \quad \boldsymbol{a \in \Re^{+} - \{1\}}.$$

Poiché la funzione esponenziale è biunivoca, se due potenze aventi la stessa base risultano uguali, devono essere uguali anche gli esponenti. Perciò per risolvere l'equazione, basterà uguagliare gli esponenti e risolvere così un'equazione algebrica $f(x) = g(x)$, ossia

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}) \;\; \text{con a} \in \Re^{+} - \{1\}.$$

ESEMPIO:

Risolvi l'equazione: $4^{2x-1} = 8$

Trasformiamo, applicando le proprietà delle potenze, entrambi i membri nella stessa base 2:

$$2^{2(2x-1)} = 2^3 \quad \Rightarrow \quad 2^{4x-2} = 2^3$$

Basterà ora risolvere l'equazione che si ottiene uguagliando gli esponenti, cioè: $4x-2=3$

Da cui otteniamo: $x=\frac{5}{4}$

2) Equazioni esponenziali in cui compaiono solo potenze, prodotti e quozienti di potenze, che si possono ricondurre alla forma particolare dell'uguaglianza tra due potenze con basi diverse, ma ugual esponente, ossia alla forma

$$\boldsymbol{a^{f(x)} = b^{f(x)}} \quad \textbf{con} \quad \boldsymbol{a, b \in \Re^+,\ a \neq b.}$$

Dal momento che $\mathrm{b}^{\mathrm{f(x)}}$ risulta diversa da zero $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{C.E.}$ di $\mathrm{f(x)}$, si possono dividere entrambi i membri per $\mathrm{b}^{\mathrm{f(x)}}$ ottenendo

$$\frac{\mathrm{a}^{\mathrm{f(x)}}}{\mathrm{b}^{\mathrm{f(x)}}} = 1$$

Ora, applicando le proprietà delle potenze, possiamo esprimere l'equazione nella forma:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \left(\frac{a}{b}\right)^{0}$$

e quindi come visto nel caso precedente, risolverla ponendo $\mathrm{f(x)} = 0$. Ossia:

$$a^{f(x)} = b^{f(x)} \Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0 \quad \text{con} \quad a, b \in \Re^+,\ a \neq b$$

ESEMPIO:

Risolvi l'equazione: $2^{\frac{x-1}{2}} = \sqrt{\frac{5^x}{5}}$

Trasformiamo, applicando le proprietà delle potenze, entrambi i membri nello stesso esponente:

$$2^{\frac{x-1}{2}} = 5^{\frac{x-1}{2}}.$$

Poiché si tratta dell'uguaglianza di potenze, con basi diverse, ma ugual esponente, possiamo scrivere:

$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x.-1}{2}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{0}$ e quindi $\frac{x-1}{2}=0$ da cui si ricava $x=1$.

3) Equazioni esponenziali in cui compaiono solo prodotti e quozienti di potenze con basi diverse, ma non riconducibili alla forma del caso 2.

Per la risoluzione è necessario passare all'uguaglianza dei logaritmi dei due membri e applicando le proprietà dei logaritmi stessi, giungere ad isolare l'incognita.

Quindi data l'equazione $\boldsymbol{a^{f(x)} = b^{g(x)}}$ **con** $\boldsymbol{a, b \in \Re^{+},\ a \neq b,\ f(x) \neq g(x)}$

per risolverla si deve passare alla forma

$$\boldsymbol{Log\ a^{f(x)} = Log\ b^{g(x)}}$$

N.B.: si possono utilizzare i logaritmi naturali anziché quelli decimali o logaritmi con una base qualunque.

ESEMPIO:

Risolvi l'equazione: $2^{3x-4} = \sqrt{5^x}$

Si passa all'uguaglianza dei logaritmi decimali dei due membri, ottenendo

$$Log 2^{3x-4} = Log\sqrt{5^x}$$

Quindi applicando le proprietà dei logaritmi abbiamo:

$$(3x-4)Log 2 = \frac{x}{2} Log 5,$$

da cui facendo il minimo comune multiplo:

$$(6x-8)Log 2 = xLog 5 \quad \Rightarrow \quad 6xLog 2 - xLog 5 = 8Log 2 \quad \Rightarrow \quad x(6Log 2 - Log 5) = 8Log 2$$

Quindi:

$$x = \frac{8Log 2}{6Log 2 - Log 5}$$

4) Equazioni esponenziali in cui compaiono addizioni o sottrazioni di potenze.

In questo caso non è possibile applicare le proprietà delle potenze, si dovrà quindi procedere dapprima scomponendo in modo opportuno i termini, operando una sostituzione di variabile o raccogliendo a fattor comune per poi giungere ad uno dei casi precedenti.

Questo caso non è schematizzabile in forma simbolica, perciò è utile mostrarne la risoluzione con alcuni esempi.

ESEMPI:

a) Risolvi l'equazione: $3^{x+1} - 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{x} = 60$

Scomponiamo i primi due termini usando le proprietà delle potenze:

$$3^{x} \cdot 3 - \frac{3^{x}}{3} + 4 \cdot 3^{x} = 60$$

Raccogliamo a fattor comune:

$$3^{x} \cdot \left(3 - \frac{1}{3} + 4\right) = 60$$

da cui $3^{x} \cdot \left(\frac{20}{3}\right) = 60 \quad \Rightarrow \quad 3^{x} = 60 \cdot \frac{3}{20} \quad \Rightarrow \quad 3^{x} = 9 \quad \Rightarrow \quad 3^{x} = 3^{2}$

quindi $x = 2$

b) Risolvi l'equazione: $4 \cdot 4^{x} - 9 \cdot 2^{x} + 2 = 0$

Cerchiamo di mettere in evidenza le potenze di 2^{x}; otteniamo:

$$4 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^{x} + 2 = 0$$

Se ora poniamo $2^{x} = t$ abbiamo un'equazione di secondo grado in t:

$$4t^{2} + 9t + 2 = 0$$

risolviamo poi l'equazione ottenuta

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8} = \begin{cases} t_{1} = 2 \\ t_{2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Quindi tornando all'incognita x, dobbiamo risolvere due equazioni esponenziali:

$2^{x} = 2$ da cui otteniamo $2^{x} = 2^{1}$ quindi $x = 1$

$2^{x} = \frac{1}{4}$ da cui otteniamo $2^{x} = 2^{-2}$ quindi $x = -2$

6. EQUAZIONI LOGARITMICHE

Un'equazione si dice **logaritmica** quando l'incognita compare nell'argomento di uno o più logaritmi. Poiché i logaritmi sono definiti solo se i loro argomenti sono positivi, prima di passare alla soluzione, sarà necessario fissare le condizioni di esistenza.

Per stabilire le C.E. si dovrà risolvere un sistema di disequazioni in cui figurano tutti gli argomenti dei logaritmi posti maggiori di zero.

Per la risoluzione dell'equazione invece, si dovrà procedere applicando le proprietà dei logaritmi, fino ad ottenere un solo logaritmo sia a primo che secondo membro. Si giungerà così ad una delle seguenti forme.

Tipi di equazioni logaritmiche:

1) Equazione data dall'uguaglianza di due logaritmi nelle stesse basi:

$$\boldsymbol{\log_a f(x) = \log_a g(x)} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Poiché la funzione logaritmica è biunivoca, se due logaritmi nelle stesse basi sono uguali tra loro, lo saranno anche i loro argomenti.

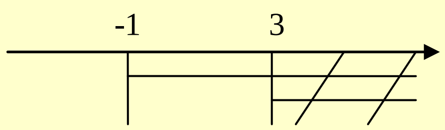
Per risolvere l'equazione logaritmica data basterà dunque uguagliare i due argomenti e risolvere così l'equazione algebrica ottenuta. Schematicamente:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) \qquad \text{con} \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

ESEMPIO:

Risolviamo l'equazione $\log_2(x-3) + \log_2 3 = \log_2(x+1)$

Determiniamo le C.E.: $\begin{cases} x-3>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x>-1 \end{cases}$



$\Rightarrow$ C.E. $x>3$

Applichiamo quindi le proprietà dei logaritmi per ottenere un unico logaritmo a primo membro:

$$\log_2 3(x-3) = \log_2(x+1)$$

passiamo ora all'uguaglianza dei due argomenti:

$$3x-9 = x+1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 10 \quad \Rightarrow \quad x=5$$

la soluzione risulta accettabile perché il valore 5 rientra nell'intervallo del C.E.

2) Equazione logaritmica elementare:

$$\mathbf{\log_a f(x) = b} \qquad \text{con} \quad a > 0, \qquad b \in \Re \;\; e \quad f(x) > 0$$

In questo caso basta utilizzare la definizione di logaritmo per poter arrivare a un'equazione del tipo precedente, infatti si può trasformare il numero b a secondo membro con $b = \log_a a^b$

ESEMPIO:

Risolviamo l'equazione $\log_2(3x-1)=3$

Determiniamo le C.E: $3x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{3}$

Usando la definizione di logaritmo si giunge all'equazione: $\log_2(3x-1)=\log_2 2^3$

da cui si ricava $3x-1=2^3 \Rightarrow 3x-1=8 \Rightarrow x=3$ confrontando con le C.E. si può concludere che la soluzione è accettabile.

7. DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Le **disequazioni esponenziali** sono quelle disequazioni che presentano almeno una potenza con l'incognita all'esponente. Si possono trovare nelle seguenti forme:

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	con $a>1$	$\Rightarrow$	$f(x)>g(x)$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	con $0<a<1$	$\Rightarrow$	$f(x)<g(x)$

$a^{f(x)} > b$ oppure $a^{f(x)} \geq b$	con $b>0$	$\Rightarrow$	Si passa ai logaritmi come nelle equazioni
	con $b \leq 0$	$\Rightarrow$	$\forall x \in \Re$

$a^{f(x)} < b$ oppure $a^{f(x)} \leq b$	con $b>0$	$\Rightarrow$	Si passa ai logaritmi come nelle equazioni
	con $b \leq 0$	$\Rightarrow$	$\nexists x \in \Re$

Osservazione: tutte le regole viste per le equazioni esponenziali sono valide anche per le disequazioni.

ESEMPI:

a) Risolvi la disequazione $4^x - 2 > 0$

Si ha $2^{2x} > 2 \quad \Rightarrow \quad 2x > 1 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{2}$

b) Risolvi la disequazione $3^{x+3} < 9$

Si ha $3^{x+3} < 3^2 \;\Rightarrow\; x+3 < 2 \;\Rightarrow\; x < -1$

c) Risolvi la disequazione $\left(\frac{3}{5}\right)^{2-x} \geq \left(\frac{9}{25}\right)$

Si ha $\left(\frac{3}{5}\right)^{2-x} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^2 \;\Rightarrow\; 2-x \leq 2 \;\Rightarrow\; -x \leq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 0$

d) Risolvi la disequazione $2^{x+4} < -4$

La disequazione è impossibile perché un esponenziale è sempre maggiore di zero, quindi

$$\nexists x \in \Re$$

8. DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Le **disequazioni logaritmiche** sono quelle disequazioni in cui l'incognita compare come argomento per almeno un logaritmo. Si possono presentare i seguenti casi:

$a > 1$:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \le \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$0 < a < 1$:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \le \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$\forall a \in R^+ - \{1\}$:

$$\log_a f(x) > b$$
$$\log_a f(x) \ge b$$
$$\log_a f(x) < b$$
$$\log_a f(x) \le b$$

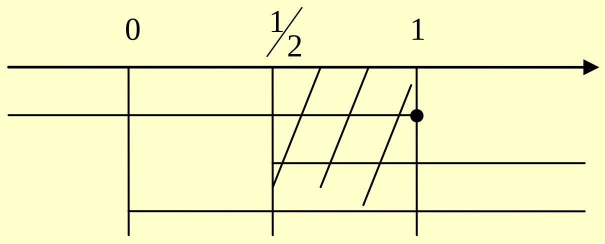
Si applica la definizione di logaritmo per cui $b = \log_a a^b$ e si ricade in uno dei casi precedenti

Osservazione: le regole viste per le equazioni logaritmiche sono valide anche per le disequazioni.

ESEMPI:

a) Risolvi la disequazione $\log_2 (2x-1) \le \log_2 x$

Per risolvere la disequazione impostiamo il sistema $\begin{cases} 2x-1 \le x \\ 2x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x > \frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases}$

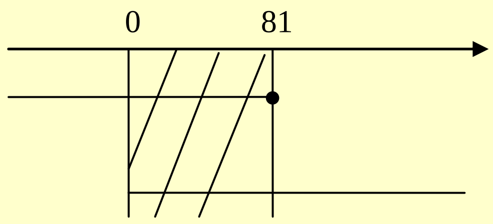


$S = \left\{ \frac{1}{2} < x \le 1 \right\}$

b) Risolvi la disequazione $\log_{\frac{1}{3}} x \ge -4$

Trasformiamo la disequazione data $\log_{\frac{1}{3}} x \ge \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

Per risolvere la disequazione impostiamo il sistema $\begin{cases} x \le \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 81 \\ x>0 \end{cases}$



$S = \{0 < x \le 81\}$

c) Risolvi la disequazione $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 > 0$

Se poniamo $\log_2 x = t$ abbiamo una disequazione di secondo grado in t:

$t^2 - 3t - 4 > 0$ risolviamo la disequazione ottenuta

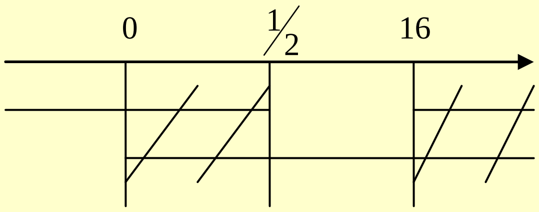
$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow \quad t < -1 \quad \cup \quad t > 4$$

Quindi torniamo all'incognita x:

$$\log_2 x < -1 \quad \cup \quad \log_2 x > 4 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x < \log_2 2^{-1} \quad \cup \quad \log_2 x > \log_2 2^4$$

$$\Rightarrow \quad x < \frac{1}{2} \quad \cup \quad x > 16$$

Quindi si imposta il sistema con le C.E. $\begin{cases} x < \frac{1}{2} \vee x > 16 \\ x > 0 \end{cases}$



$$S = 0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 16$$