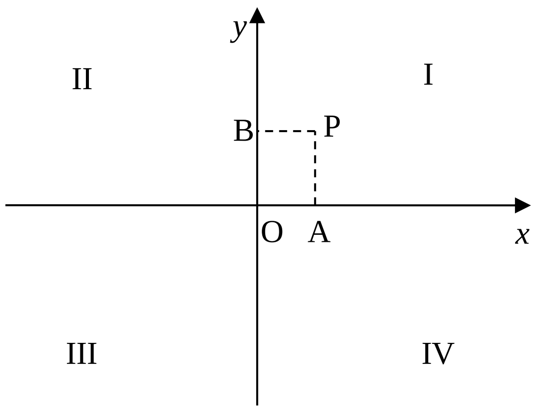
CAPITOLO 4

IL PIANO CARTESIANO

1. COORDINATE CARTESIANE NEL PIANO

Una retta si dice **orientata** se su di essa è fissato un verso di percorrenza, indicato graficamente con una freccia, e detto **verso positivo**; il verso opposto è detto **negativo.** Si considerino nel piano due rette orientate perpendicolari tra di loro, che indicheremo con le lettere x e y, e chiameremo **asse delle ascisse** (x) e **asse delle ordinate** (y). Sia O il loro punto di intersezione, detto **origine degli assi**. Tali assi dividono il piano cartesiano in quattro regioni, dette **quadranti**, come si osserva nel grafico seguente:



Un punto generico P del piano è rappresentato da una coppia ordinata di numeri reali, detti **coordinate** del punto, ed è indicato da **P(x; y)** oppure **P≡(x; y)**. La prima coordinata (x) è detta **ascissa del punto**, la seconda (y) è detta **ordinata del punto**. Fissato sull'asse delle ascisse il punto A di coordinata x e sull'asse delle ordinate il punto B di coordinata y, tracciando da A e B le perpendicolari rispettivamente all'asse x e all'asse y, si ottiene uno ed un sol punto P di intersezione: in tal modo alla coppia di numeri (x; y) abbiamo corrisposto uno ed un sol punto P del piano. Di conseguenza i punti dell'asse delle ascissa avranno ordinata nulla, mentre i punti sull'asse delle ordinate avranno ascissa nulla; l'origine avrà quindi entrambe le coordinate nulle, cioè O(0; 0).

2. DISTANZA TRA DUE PUNTI

Per distanza tra due punti A e B nel piano cartesiano si intende la lunghezza del segmento AB. Ci proponiamo di calcolare tale lunghezza in funzione delle coordinate dei punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ assegnati nei tre casi raffigurati nella seguente figura.

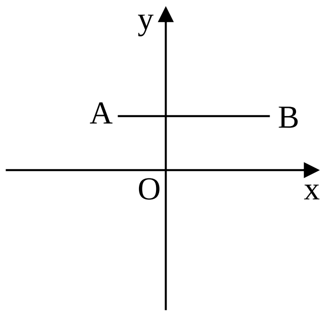


Figura 1

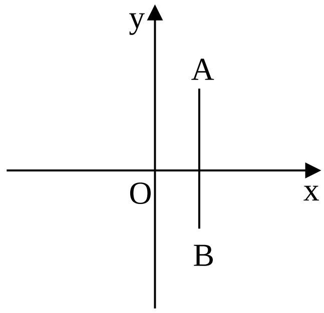


Figura 2

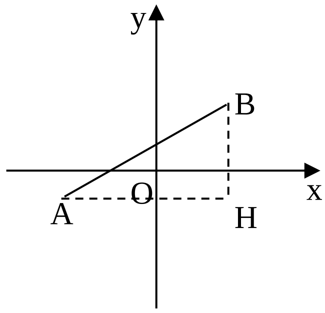


Figura 3

1° CASO (figura 1): il segmento AB è parallelo all'asse x, cioè $y_1 = y_2$.

In questo caso la lunghezza del segmento AB è il valore assoluto della differenza tra le ascisse dei due punti, ossia:

$$\overline{AB} = |x_1 - x_2|$$

2° CASO (figura 2): il segmento AB è parallelo all'asse y, cioè $x_1 = x_2$.

In questo caso la lunghezza del segmento AB è il valore assoluto della differenza tra le ordinate dei due punti, ossia:

$$\overline{AB} = |y_1 - y_2|$$

3° CASO (figura 3): il segmento AB non è parallelo a nessuno degli assi cartesiani, cioè $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$.

In questo caso la lunghezza del segmento AB è data dal teorema di Pitagora, ossia:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ESEMPI:

a) Calcolare la distanza tra i punti di coordinate $A(1;\ -2)$ e $B(-7;\ -2)$.

Poiché $y_1 = y_2$, siamo nel caso 1 e quindi $\overline{AB} = |1-(-7)| = |1+7| = 8$

b) Calcolare la distanza tra i punti di coordinate $A(1;\ -5)$ e $B(1;\ -3)$.

Poiché $x_1 = x_2$, siamo nel caso 2 e quindi $\overline{AB} = |-5-(-3)| = |-5+3| = |-2| = 2$

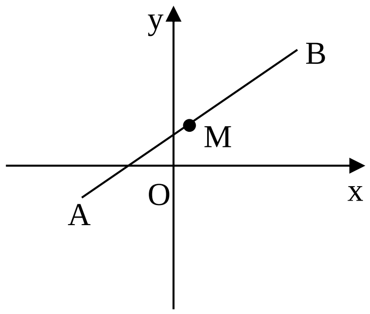
c) Calcolare la distanza tra i punti di coordinate $A(-1;\ 2)$ e $B(3;\ 5)$.

Poiché $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, siamo nel caso 3 e quindi

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

3. PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

Assegnati due punti A e B di coordinate generiche $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$, le coordinate del punto medio M del segmento AB sono rispettivamente la media aritmetica delle ascisse di A e B e la media aritmetica delle ordinate di A e B, ossia:



$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ESEMPIO:

a) Calcolare il punto medio del segmento AB, essendo $A(1;\ -2)$ e $B(-7;\ -5)$.

L'ascissa del punto medio M è data da:

$$x_M = \frac{1-7}{2} = -3$$

L'ordinata del punto medio M è data da:

$$y_M = \frac{-2-5}{2} = -\frac{7}{2}$$

Perciò il punto medio del segmento AB ha coordinate

$$M \equiv \left(-3;\ -\frac{7}{2}\right)$$