CAPITOLO 2

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

1. EQUAZIONI IRRAZIONALI

Un'equazione si dice *irrazionale* se l'incognita è presente nell'argomento di uno o più radicali. Per risolvere un'equazione irrazionale è necessario elevare ad un'opportuna potenza entrambi i membri dell'equazione. L'equazione razionale ottenuta ammetterà le stesse soluzioni dell'equazione irrazionale di partenza, ma potrà anche ammettere soluzioni che non soddisfano l'equazione irrazionale data. E' quindi necessario porre opportune condizioni per fare in modo che ciò non si verifichi.

1) Equazioni del tipo $\sqrt[n]{A(x)} = k$

Queste equazioni si risolvono seguendo il seguente schema:

n pari se $k < 0$ $\Rightarrow$ impossibile

se $k = 0$ $\Rightarrow$ $A(x) = 0$

se $k > 0$: si elevano entrambi i membri alla potenza n-esima, dopo aver posto le condizioni di esistenza $A(x) \geq 0$ per il radicale di indice pari

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) = k^n \end{cases}$$

e si discute l'accettabilità delle soluzioni ottenute.

n dispari e $\forall\ k \in R$: si elevano entrambi i membri alla potenza n-esima **senza** porre condizioni di esistenza poiché un radicale di indice dispari esiste qualunque sia il segno del suo argomento

$$\Rightarrow \quad A(x) = k^n$$

ESEMPI:

a) Risolvere l'equazione $\sqrt{3x+1} = -2$

È il caso in cui n è pari e $k < 0$, quindi l'equazione è **impossibile**.

b) Risolvere l'equazione $\sqrt{4x-8}=0$

E' il caso in cui n è pari e $k=0$ $\Rightarrow$ $4x-8=0$ $\Rightarrow$ $x=2$

c) Risolvere l'equazione $\sqrt{2x-1}=3$

E' il caso in cui n è pari e $k>0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}2x-1\geq 0\\ 2x-1=3^2\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}x\geq \frac{1}{2}\\ x=5\end{cases}$

La soluzione $x=5$ è accettabile in quanto 5 è maggiore di $\frac{1}{2}$. Quindi $S=\{5\}$.

d) Risolvere l'equazione $\sqrt[3]{x-1}=2$

E' il caso in cui n è dispari $\Rightarrow$ $x-1=2^3$ $\Rightarrow$ $x=9$

e) Risolvere l'equazione $\sqrt[3]{3-2x}=-1$

E' il caso in cui n è dispari $\Rightarrow$ $3-2x=(-1)^3$ $\Rightarrow$ $x=2$

f) Risolvere l'equazione $\sqrt[3]{x^2-4}=0$

E' il caso in cui n è dispari $\Rightarrow$ $x^2-4=0$ $\Rightarrow$ $x=\pm 2$

2) Equazioni del tipo $\sqrt[n]{A(x)}=B(x)$

E' necessario distinguere il caso di n pari in cui bisogna porre le condizioni di esistenza del radicando $(A(x)\geq 0)$ e di concordanza del secondo membro $(B(x)\geq 0)$, dal caso in cui n è dispari in cui **NON** vi sono condizioni da porre. Quindi:

n pari $\Rightarrow$ $\begin{cases}A(x)\geq 0\\ B(x)\geq 0\\ A(x)=[B(x)]^n\end{cases}$

Si risolve pertanto il sistema delle due disequazioni e si verifica se le soluzioni dell'equazione sono accettabili o meno.

n dispari $\Rightarrow$ $A(x)=[B(x)]^n$

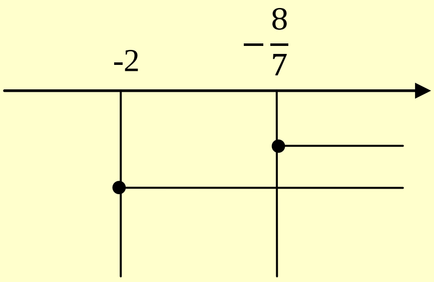
ESEMPI:

a) Risolvere l'equazione $\sqrt{7x+8}=x+2$

È il caso in cui n è pari, quindi

$$\begin{cases} 7x+8 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 7x+8=(x+2)^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq -\frac{8}{7} \\ x \geq -2 \\ x^2-3x-4=0 \end{cases}$$

Risolviamo innanzi tutto il sistema delle due disequazioni.



$$x \geq -\frac{8}{7}$$

Risolviamo ora l'equazione:

$$x=\frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}=\frac{3 \pm 5}{2}= \begin{cases} 4 & accettabile \\ -1 & accettabile \end{cases}$$

Quindi $S=\{-1; 4\}$

b) Risolvere l'equazione $\sqrt[3]{x^3+27}=x+3$

E' il caso in cui n è dispari.

$$x^3+27=(x+3)^3 \quad \Rightarrow \quad x^3+27=x^3+27+9x^2+27x$$

$$9x^2+27x=0 \quad \Rightarrow \quad 9x(x+3)=0$$

da cui: $x=0 \quad \cup \quad \mathrm{x}=-3$

2. DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Una disequazione si dice irrazionale se vi è almeno un radicale in cui l'argomento contenga l'incognita. Come per la risoluzione delle equazioni irrazionali, anche per la risoluzione delle disequazioni si devono elevare una o più volte entrambi i membri ad un'opportuna potenza, ma occorre ogni volta fare attenzione al segno di ogni singolo membro. Infatti non è detto che elevando entrambi i membri ad una certa potenza, si ottenga una disequazione equivalente a quella data, come si può notare nell'esempio che segue.

ESEMPIO:

Consideriamo la disequazione $\sqrt{x} > -3$.

Essa è verificata per $x \geq 0$; infatti il C.E. è $x \geq 0$ e la radice di indice pari è sempre non negativa quindi sarà sicuramente maggiore di -3.

Elevando entrambi i membri al quadrato si otterrebbe $x > 9$ **non** equivalente alla disequazione data.

Dobbiamo quindi tener presente il segno il segno delle due espressioni prima di elevare a potenza e naturalmente considerare le condizioni di esistenza dei singoli radicali presenti nella disequazione. Per risolvere una disequazione irrazionale bisogna quindi distinguere i seguenti casi:

n **dispari**

$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$ è equivalente a $A(x) > [B(x)]^n$

$\sqrt[n]{A(x)} \geq B(x)$ è equivalente a $A(x) \geq [B(x)]^n$

$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$ è equivalente a $A(x) < [B(x)]^n$

$\sqrt[n]{A(x)} \leq B(x)$ è equivalente a $A(x) \leq [B(x)]^n$

n **pari**

$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$ è equivalente a $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases}$

$\sqrt[n]{A(x)} \geq B(x)$ è equivalente a $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq [B(x)]^n \end{cases}$

- La prima disequazione del primo sistema, è dettata dalle condizioni di esistenza del radicale di indice pari.
- La seconda disequazione del primo sistema, deriva dal fatto che se $B(x)$ fosse negativo sarebbe sicuramente minore del primo membro che risulta positivo o nullo.
- La prima disequazione del secondo sistema richiede la positività del secondo membro per poter poi elevare entrambi i membri alla stessa potenza.
- La seconda disequazione del secondo sistema si ottiene elevando entrambi i membri alla potenza n-esima e mantenendo il verso della disequazione data perché i due

membri sono entrambi positivi o nulli.

- La condizione $A(x) \geq 0$ nel secondo sistema è superflua perché è contenuta nella seconda disequazione di elevamento a potenza.

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \text{ è equivalente al sistema } \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} \leq B(x) \text{ è equivalente al sistema } \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq [B(x)]^n \end{cases}$$

- La prima disequazione è data dalle condizioni di esistenza del radicale di indice pari.
- La seconda disequazione deriva dal fatto che $B(x)$ deve essere maggiore del primo membro che risulta essere positivo o nullo.
- La terza condizione si ottiene elevando entrambi i membri alla potenza n-esima e mantenendo il verso della disequazione perché i due membri sono entrambi positivi o nulli.

Se la disequazione irrazionale contenesse due o più radicali, anche di indici diversi, occorrerebbe, dopo aver valutato le condizioni di esistenza dei singoli radicali e il segno dei vari membri, elevare più volte a potenza per rendere la disequazione razionale e ad ogni passaggio sarebbe necessario chiedersi se sono state rispettate tutte le condizioni viste sopra al fine di ottenere una disequazione equivalente a quella data.

Casi particolari

Nel caso di equazioni irrazionali contenenti radici di indice **pari** in cui il secondo membro *B(x)* non sia un'espressione contenente l'incognita, bensì un numero *k*, i sistemi visti in precedenza si semplificano come indicato nello schema seguente.

k > 0	$\sqrt[n]{A(x)} > k$	$\Rightarrow$	$A(x) > k^n$
	$\sqrt[n]{A(x)} \geq k$	$\Rightarrow$	$A(x) \geq k^n$
	$\sqrt[n]{A(x)} < k$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < k^n \end{cases}$

$$\sqrt[n]{A(x)} \leq k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) \leq k^n \end{cases}$$

k < 0

$$\sqrt[n]{A(x)} > k \quad \Rightarrow \quad A(x) \geq 0$$

$$\sqrt[n]{A(x)} \geq k \quad \Rightarrow \quad A(x) \geq 0$$

$$\sqrt[n]{A(x)} < k \quad \Rightarrow \quad \nexists x \in R$$

$$\sqrt[n]{A(x)} \leq k \quad \Rightarrow \quad \nexists x \in R$$

k = 0

$$\sqrt[n]{A(x)} > 0 \quad \Rightarrow \quad A(x) > 0$$

$$\sqrt[n]{A(x)} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A(x) \geq 0$$

$$\sqrt[n]{A(x)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists x \in R$$

$$\sqrt[n]{A(x)} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad A(x) = 0$$

ESEMPI:

a) Risolvere la disequazione $\sqrt{3x+1} > -2$

La disequazione è sempre verificata nel suo campo di esistenza, ossia

$$3x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -\frac{1}{3}$$

b) Risolvere la disequazione $\sqrt{4x-8} \leq 0$

$$4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

c) Risolvere la disequazione $\sqrt[3]{x-1} \leq 2$

$$x - 1 \leq 2^3 \quad \Rightarrow \quad x \leq 9$$

d) Risolvere la disequazione $\sqrt[3]{3-2x} > -1$

$$3 - 2x > (-1)^3 \quad \Rightarrow \quad x < 2$$

e) Risolvere la disequazione $\sqrt[3]{x^2-4} \geq 0$

$$x^2 - 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq -2 \cup x \geq 2$$

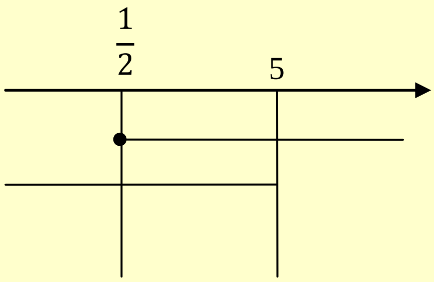
f) Risolvere la disequazione $\sqrt{x-5} - 3 > 0$

Per prima cosa si isola la radice: $\sqrt{x-5} > 3$

$$x - 5 > 9 \quad \Rightarrow \quad x > 14$$

g) Risolvere la disequazione $\sqrt{2x-1} < 3$

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 < 3^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 5 \end{cases}$$



$$\frac{1}{2} \leq x < 5$$

h) Risolvere la disequazione $\sqrt{4x+6} \leq -2$

E' il caso in cui n è pari e $k < 0$ $\quad \Rightarrow \quad \nexists x \in R$

i) Risolvere la disequazione $2\sqrt{x+2} \geq 0$

Dividendo entrambi i membri per 2 si ottiene $\sqrt{x+2} \geq 0$

$$x + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -2$$

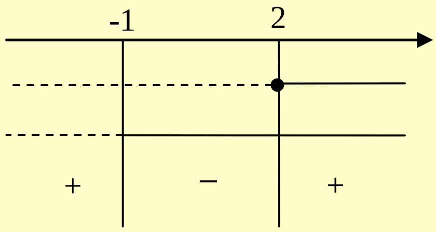
j) Risolvere la disequazione

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \leq 3$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x+1} \geq 0 \\ \frac{x-2}{x+1} \leq 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} \begin{cases} \frac{x-2}{x+1} \geq 0 \\ \frac{-8x-11}{x+1} \leq 0 \end{cases}$$

Risolviamo la **A**: $N \geq 0 \; \Rightarrow \; x \geq 2$

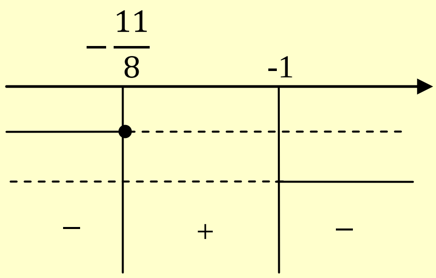
$$D > 0 \; \Rightarrow \; x > -1$$



Ed essendo la frazione ≥ 0, la soluzione della **A** è: $x < -1 \;\cup\; x \geq 2$

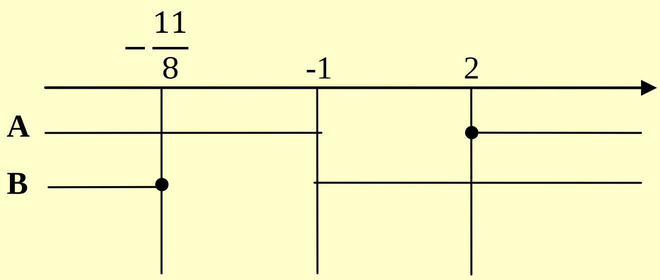
Risolviamo poi la **B**: $N \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq -\frac{11}{8}$

$D > 0 \;\Rightarrow\; x > -1$



Ed essendo la frazione ≤ 0, la soluzione della **B** è: $x \leq -\frac{11}{8} \;\cup\; x > -1$

Infine, si risolve il sistema tra **A** e **B**:



La soluzione è: $x \leq -\frac{11}{8} \;\cup\; x \geq 2$

k) Risolvere la disequazione $\sqrt{5x-15} > 0$

$5x - 15 > 0 \;\Rightarrow\; x > 3$

l) Risolvere la disequazione $\sqrt{4-x^2} < -1$

E' il caso in cui n è pari e *k* < 0 $\;\Rightarrow\; \nexists x \in R$

m) Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{2x+5}}{2} < 0$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per 2: $\sqrt{2x+5} < 0$

E' il caso in cui n è pari e *k* = 0 $\Rightarrow$ $\nexists x \in R$

n) Risolvere la disequazione $\sqrt{x^2-5x+6} \geq -4$

$$x^2-5x+6 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 2 \ \cup \ x \geq 3$$

o) Risolvere la disequazione $3\sqrt{3x-9} \geq 2$

Eleviamo entrambi i membri alla seconda: $\left(3\sqrt{3x-9}\right)^2 \geq 2^2$

$$\Rightarrow \quad 9(3x-9) \geq 4 \quad \Rightarrow \quad 27x-81 \geq 4 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{85}{27}$$

p) Risolvere la disequazione $\sqrt{x^2-4} > x+3$

Si devono trovare i valori che soddisfano l'uno o l'altro dei due sistemi:

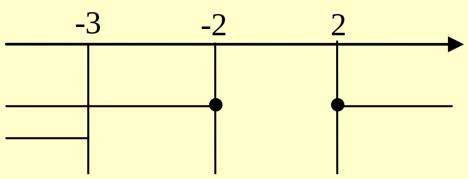
$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x+3 < 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-4 > (x+3)^2 \end{cases}$$

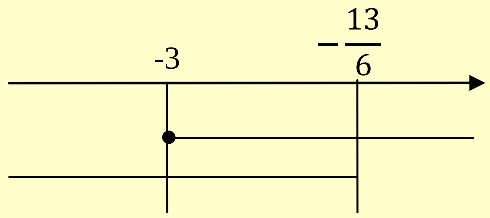
$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \ \cup \ x \geq 2 \\ x < -3 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2-4 > x^2+6x+9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \ \cup \ x \geq 2 \\ x < -3 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ -6x > 13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \ \cup \ x \geq 2 \\ x < -3 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ x < -\frac{13}{6} \end{cases}$$

Schematicamente:





$$x < -3 \quad \cup \quad -3 \leq x < -\frac{13}{6}$$

Quindi la soluzione è: $x < -\frac{13}{6}$

q) Risolvere la disequazione $\sqrt[3]{8x^3 + 12x^2} > 2x + 1$

Essendo la radice di indice dispari non vi sono condizioni da porre e si elevano subito entrambi i membri alla terza:

$$8x^3 + 12x^2 > (2x+1)^3$$

$$\Rightarrow \quad 8x^3 + 12x^2 > 8x^3 + 1 + 12x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow \quad 6x + 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -\frac{1}{6}$$

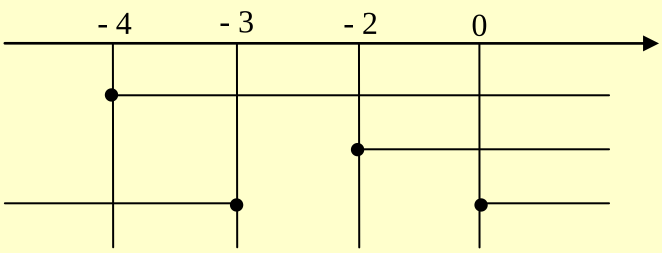
r) Risolvere la disequazione $\sqrt{x+4} \le x + 2$

Si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + 4 \ge 0 \\ x + 2 \ge 0 \\ x + 4 \le (x+2)^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \ge -4 \\ x \ge -2 \\ x + 4 \le x^2 + 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x \ge -4 \\ x \ge -2 \\ x^2 + 3x \ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \ge -4 \\ x \ge -2 \\ x \le -3 \quad \cup \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Schematicamente:



$$S = \{x \ge 0\}$$