CAPITOLO 8

CENNI SULLE TRASFORMAZIONI DI FUNZIONI

1. LE FUNZIONI

Una nozione importantissima in ogni settore della scienza è la nozione matematica di funzione (chiamata anche corrispondenza o applicazione); fu introdotta nel diciassettesimo secolo da Newton per esprimere sostanzialmente la dipendenza di una variabile da un'altra.

Nell'esperienza quotidiana utilizziamo implicitamente il concetto di funzione quando, ad esempio, affermiamo che:

- l' automobile che posso permettermi è funzione del mio stipendio;
- la pressione dipende dall'altitudine;
- la misura di una circonferenza è funzione della lunghezza del raggio;
- il tempo di percorrenza del tram dipende dalla lunghezza del percorso effettuato.

Nel linguaggio comune le espressioni *dipende da* è *equivalente* a è *funzione di*, esprimono il concetto di relazione o dipendenza fra due o più entità. In matematica, una funzione è una relazione con particolari caratteristiche.

In generale si definisce ***funzione*** una relazione che associa ad ogni elemento di un certo insieme di partenza uno ed un solo elemento di un insieme d'arrivo.

Ad esempio è una funzione la legge che associa ad ogni studente della tua scuola la sua età anagrafica, oppure la legge che associa ad ogni capitale europea la temperatura media misurata nel mese di agosto.

In questi esempi le funzioni sono relazioni che intercorrono fra insiemi studenti-età e città-temperatura, noi ci occuperemo sempre di funzioni matematiche, cioè di funzioni dove l'insieme di parenza e di arrivo sono insiemi numerici.

2. LE FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

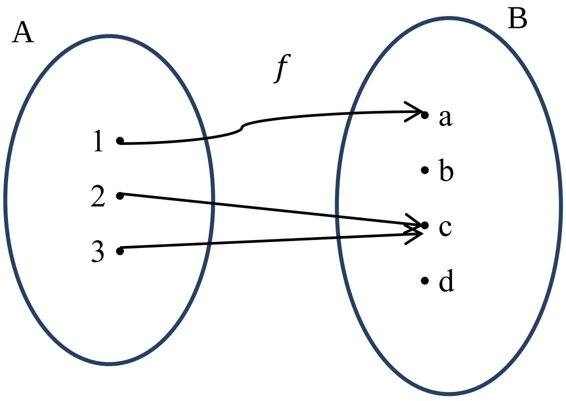
Si dice ***applicazione o funzione f*** una relazione tra due insiemi A e B non vuoti che ad ogni elemento $x \in A$ associa un solo elemento $y \in B$ (cioè uno e non più di uno). Se in particolare x e y sono numeri reali, si parla di *funzioni reali di variabile reale*.

In simboli: $f : A \rightarrow B$

Dove f rappresenta la funzione, A è l'insieme degli elementi su cui agisce la f, cioè gli elementi di partenza x, e B rappresenta l'insieme di arrivo o anche l'insieme delle immagini $y = f(x)$ degli elementi x tramite la f.

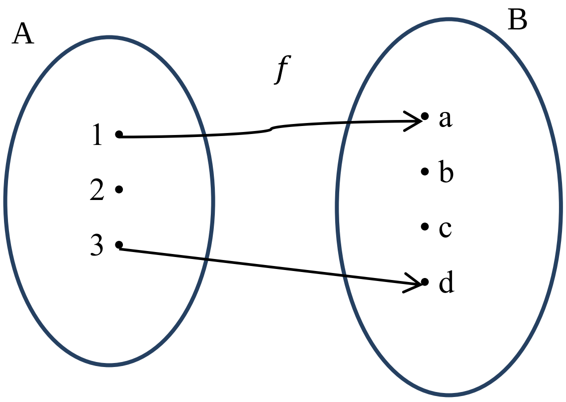
È necessario capire molto bene ogni parola della precedente definizione, per fare ciò utilizziamo i diagrammi di Eulero-Venn.

Consideriamo i seguenti insiemi $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ e consideriamo le leggi definite dalle associazioni date dalle frecce:

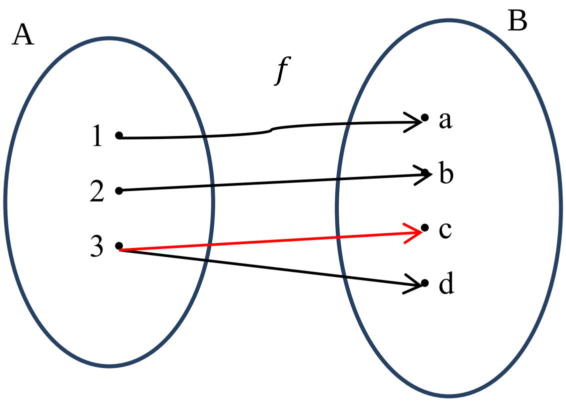


La legge f ***<u>è</u>*** una funzione, infatti:

- ✓ da ogni elemento di A parte una freccia
- ✓ da ogni elemento di A parte non più di una freccia



La legge f ***<u>non</u>*** è una funzione, infatti: esiste almeno un elemento in A al quale non è associato alcun elemento di B.



La legge f ***<u>non</u>*** è una funzione, infatti: esiste almeno un elemento in A al quale è associato più di un elemento di B.

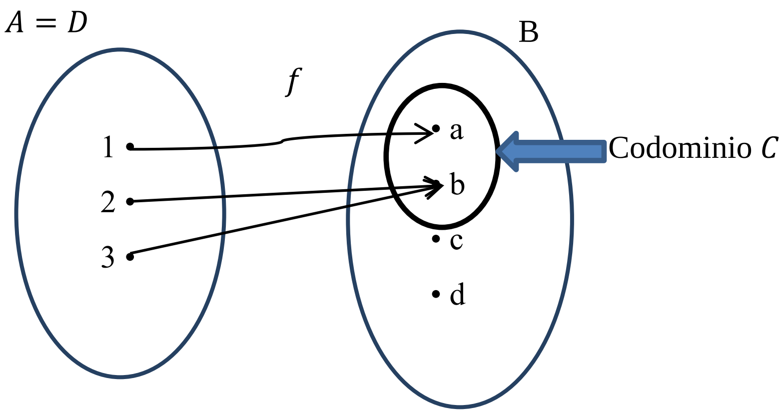
La notazione $y = f(x)$ è l'espressione analitica della funzione matematica, con x e y rispettivamente variabile indipendente e variabile dipendente.

Se x è un qualsiasi elemento dell'insieme A, con $f\ (x)$ indichiamo l'elemento $y \in B$ che corrisponde ad x mediante la funzione f.

L'elemento y di B si dice immagine di x mediante f.

Il *dominio* $\boldsymbol{D}$ (o Campo di Esistenza CdE, o anche insieme di definizione) di una funzione è il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da tutti e soli i valori della x per cui esistano finiti i corrispondenti valori di $y = f(x)$; cioè è l'insieme dei valori di A per i quali la funzione non perde di significato.

Il *codominio* $\boldsymbol{C}$ di una funzione è il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da tutti gli elementi y che sono i corrispondenti dei valori x appartenenti al dominio della funzione.



L'introduzione del metodo delle coordinate cartesiane ha permesso di stabilire una corrispondenza biunivoca tra le coppie ordinate di numeri reali ed i punti del piano. Grazie a questa corrispondenza è quindi possibile rappresentare graficamente le coppie ordinate di numeri reali che soddisfano una relazione del tipo $y = f(x)$; la totalità di queste coppie individua un sottoinsieme di punti del piano cartesiano che costituisce il grafico della funzione.

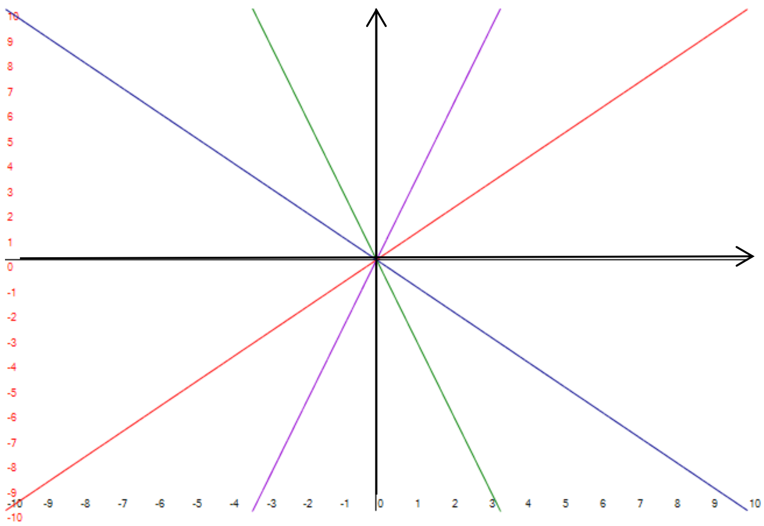
Si definisce *grafico o diagramma* di una funzione è l'insieme dei punti P del piano cartesiano Oxy che hanno per ascissa il generico elemento x del dominio e per ordinata il valore $y = f(x)$. Il grafico di una funzione fornisce una rappresentazione sintetica della funzione $y = f(x)$ mostrandone le principali caratteristiche e proprietà.

3. *GRAFICI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI*

Vediamo ora qualche esempio di grafici di funzioni elementari, che hanno quindi un andamento noto.

- **Funzione lineare**: $y = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$

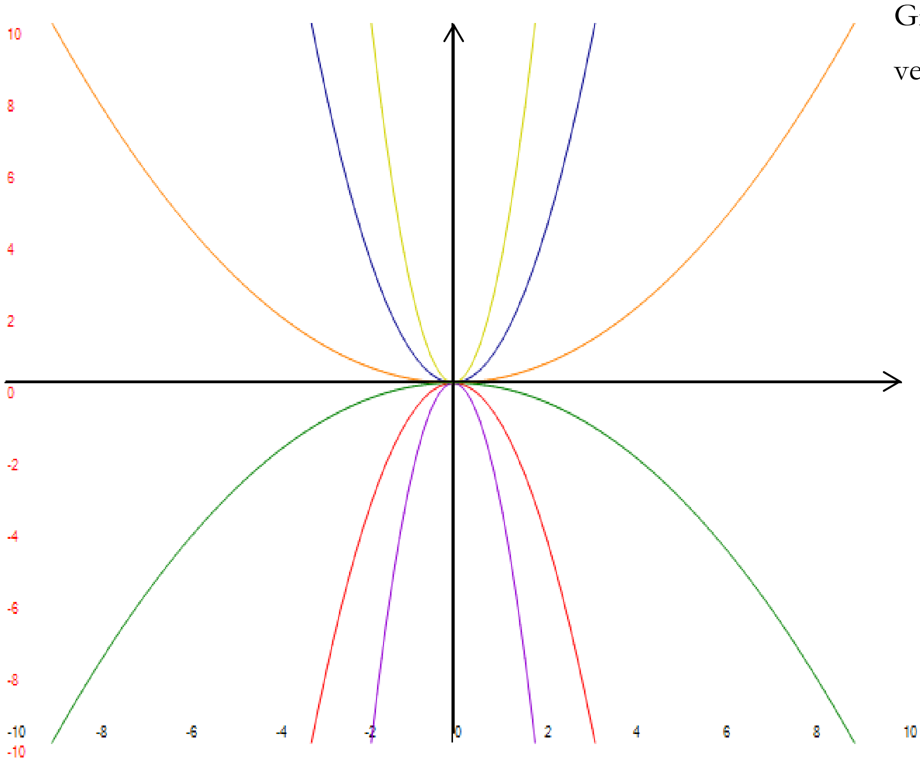
È una funzione polinomiale di primo grado e sul piano cartesiano è rappresentata da una retta.



Grafici di alcune rette passanti per l'origine degli assi.

Funzione quadratica: $y = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

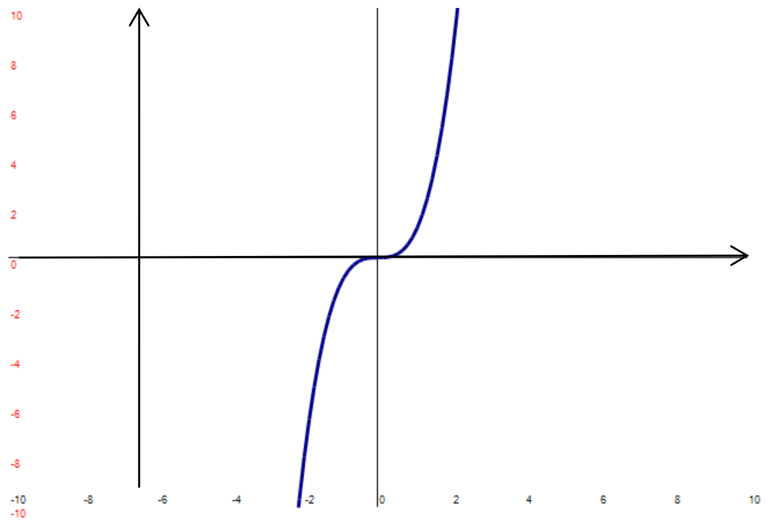
È una funzione polinomiale di secondo grado e sul piano cartesiano è rappresentata da una parabola con asse parallelo all'asse y.



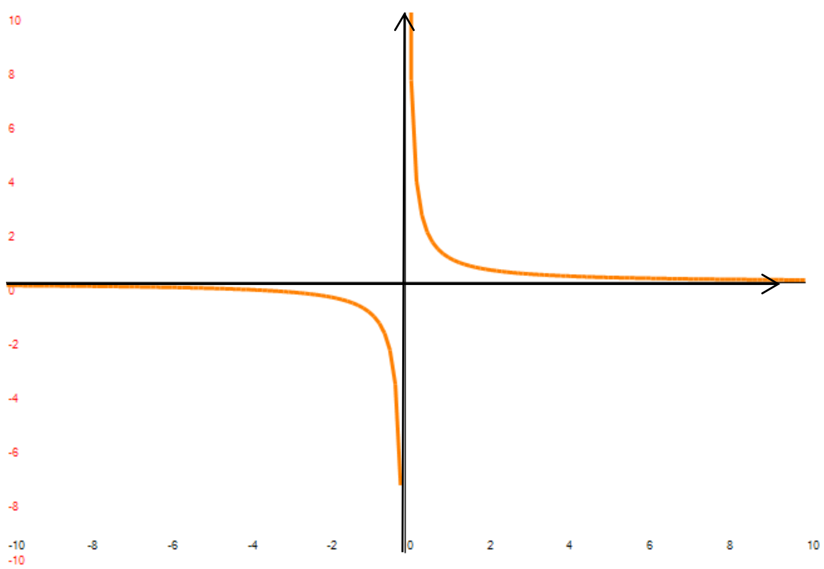
Grafici di alcune parabole con vertice nell'origine degli assi.

Cubica: $y = ax^3$ con $a \in \mathbb{R}$

È una funzione polinomiale di terzo grado.

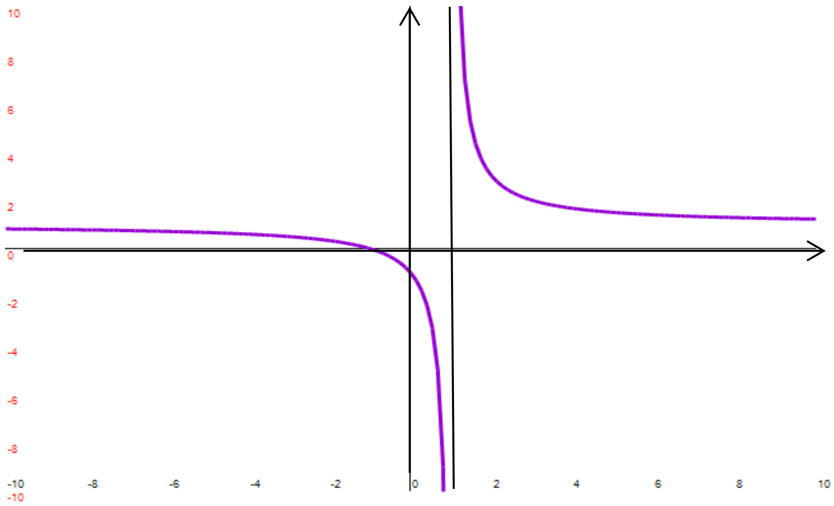


Iperbole equilatera (riferita ai propri asintoti): $y = \frac{a}{x}$ con $a \in \mathbb{R}$



Funzione omografica: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

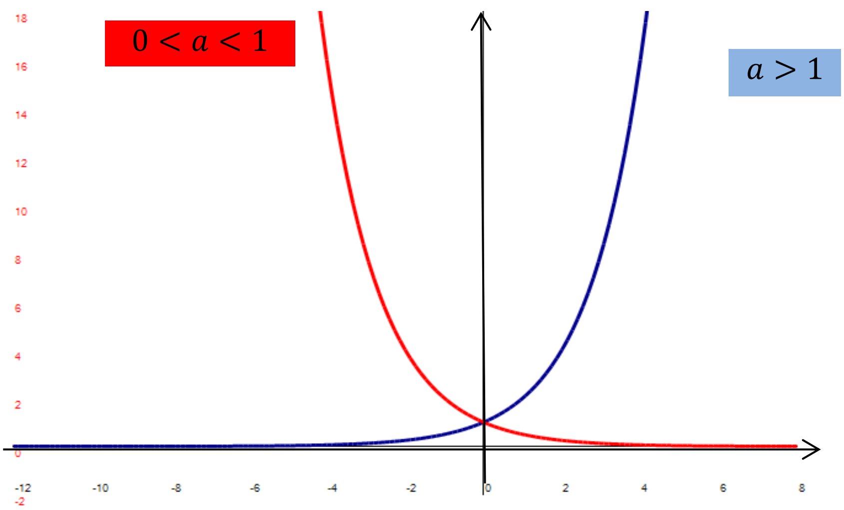
E' un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti di centro $C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ e quindi traslata rispetto alla precedente.



Funzione esponenziale: $y = a^x$ con $a \in \mathbb{R}^+$

Ogni curva di equazione $y = a^x$, con $a > 0$ ha le seguenti caratteristiche:

- passa per il punto $(0; 1)$ perché $a^0 = 1 \quad \forall a$
- la funzione ha il grafico solo nel semipiano positivo delle y
- la funzione non interseca l'asse x poiché non esiste un valore x che rende $a^x = 0$.



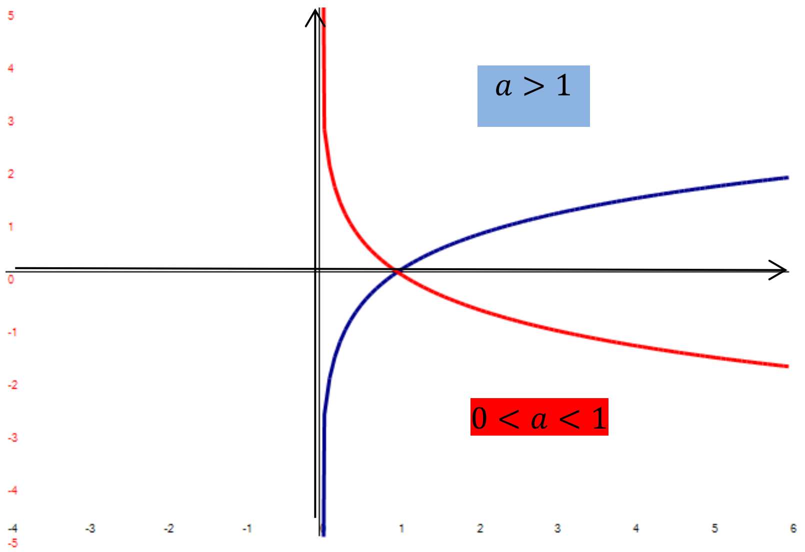
Si nota che:

- se $0 < a < 1$ la funzione è decrescente;
- se $a > 0$ la funzione è crescente.

Funzione logaritmica: $y = log_a x$ con $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$

Ogni curva di equazione $y = log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$ ha le seguenti caratteristiche:

- passa sempre per il punto $(1; 0)$ perché $log_a 1 = 0 \quad \forall a$
- la funzione si trova solo nel semipiano positivo delle x.
- la curva non interseca l'asse y poiché non esiste $log_a 0$ essendo $a^n \neq 0 \quad \forall n.$



Come per la funzione esponenziale, l'andamento della funzione logaritmica cambia a seconda del valore della base a:

- se $0 < a < 1$ la funzione è decrescente;
- se $a > 1$ la funzione è crescente.

4. TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE DI FUNZIONI

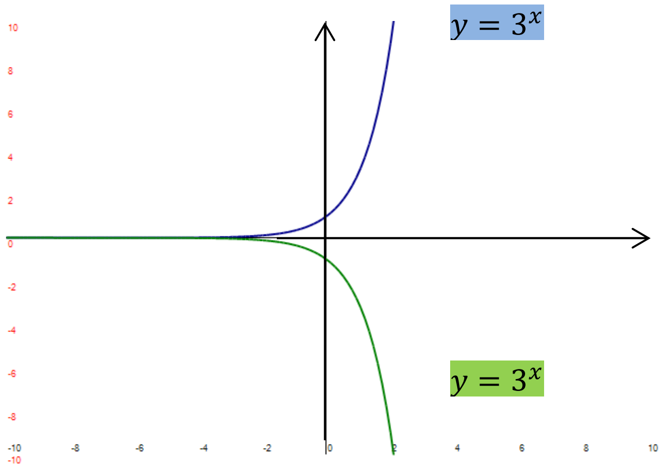
A volte il grafico di una funzione f può essere ottenuto da quello di un'altra funzione g mediante l'applicazione di opportune trasformazioni.

Una trasformazione geometrica è una corrispondenza biunivoca tra i punti di un piano. Se in questo piano fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, una trasformazione associa ad ogni punto $P(x, y)$ del piano un punto $P'(x', y')$ le cui coordinate sono legate a quelle di P.

Consideriamo una funzione di equazione $y = f(x)$ di cui sia noto il grafico; ci proponiamo di costruire i grafici di altre funzioni partendo dal grafico di $f(x)$.

- Grafico di $\boldsymbol{y = -f(x)}$

Il grafico si ottiene da quello di $f(x)$ operando una simmetria rispetto all’asse x:



- Grafico di $\boldsymbol{y = f(-x)}$

Il grafico si ottiene da quello di $f(x)$ operando una simmetria rispetto all’asse delle ordinate:

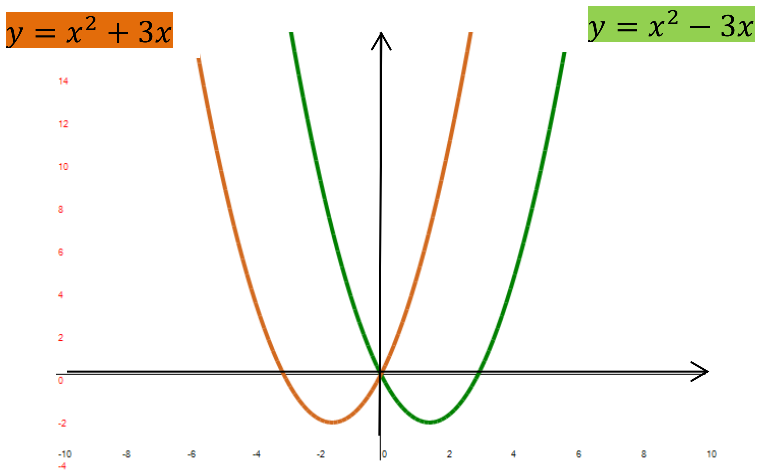


Grafico di $\boldsymbol{y = f(x + k)}$

Il grafico si ottiene da quello di $f(x)$ operando una traslazione lungo l'asse delle ascisse.

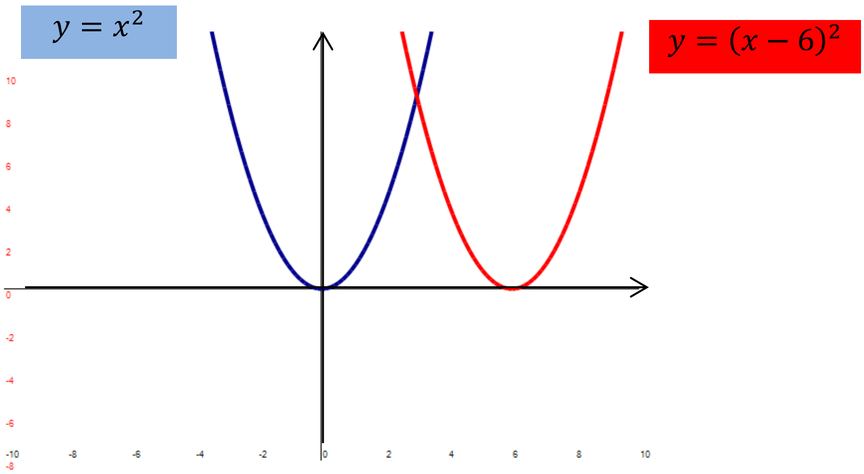


Grafico di $\boldsymbol{y = f(x) + k}$

Il grafico si ottiene da quello di $f(x)$ operando una traslazione lungo l'asse delle ordinate.

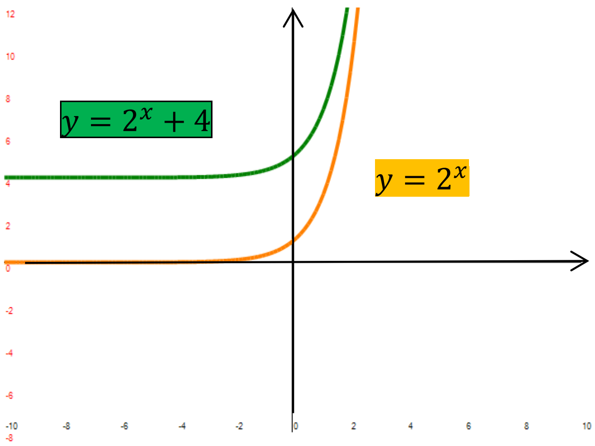
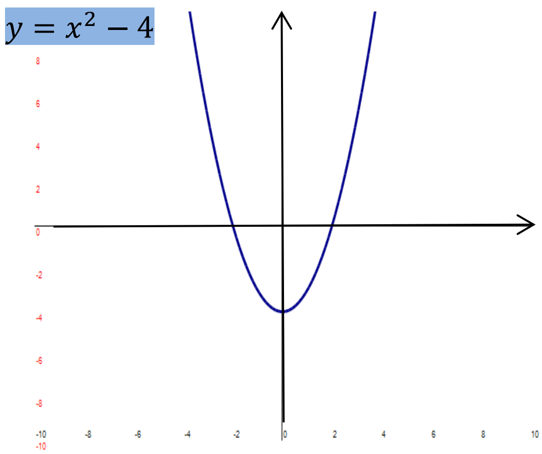


Grafico di $\boldsymbol{y = |f(x)|}$

Il grafico si ottiene da quello di $f(x)$ operando una simmetria rispetto asse delle ascisse solo dei punti di ordinata negativa.



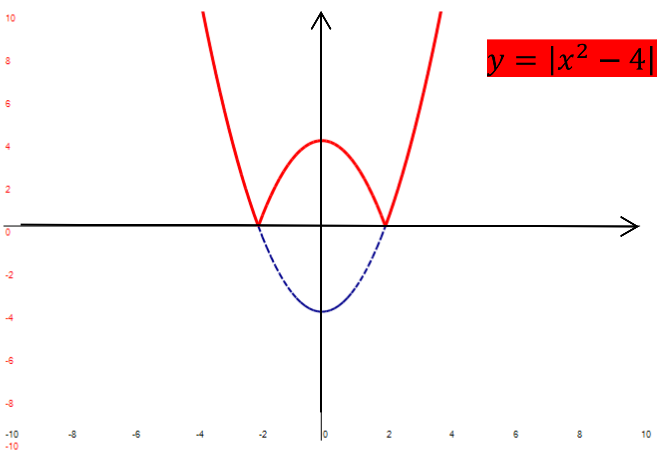
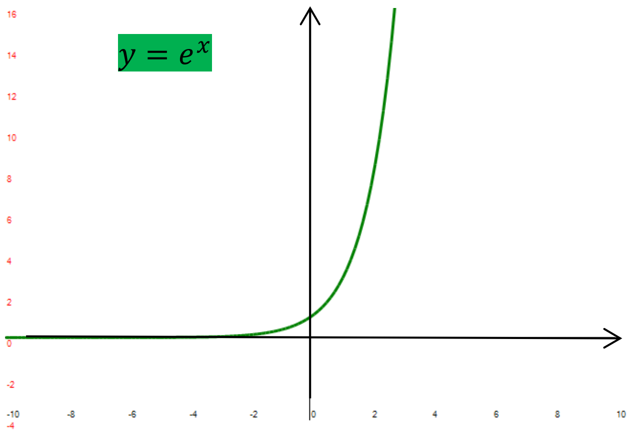


Grafico d $\boldsymbol{y = f(|x|)}$

Il grafico si ottiene da quello di $f(x)$ mantenendo l'andamento originario di $f(x)$ nei punti di ascissa positiva, eliminando il grafico originario di $f(x)$ nei punti di ascissa negativa, sostituendolo con il simmetrico di $f(x)$ disegnato per $x > 0$, cioè il grafico di $y = f(|x|)$ si ottiene dunque da quello di $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ operando una simmetria rispetto all'asse delle ordinate della sola parte che appartiene al semipiano positivo delle ascisse.



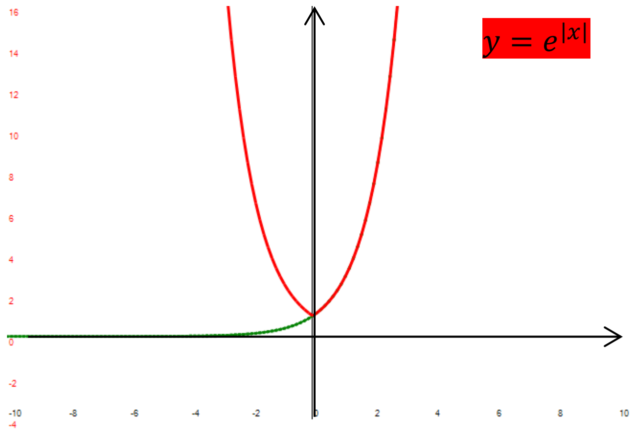
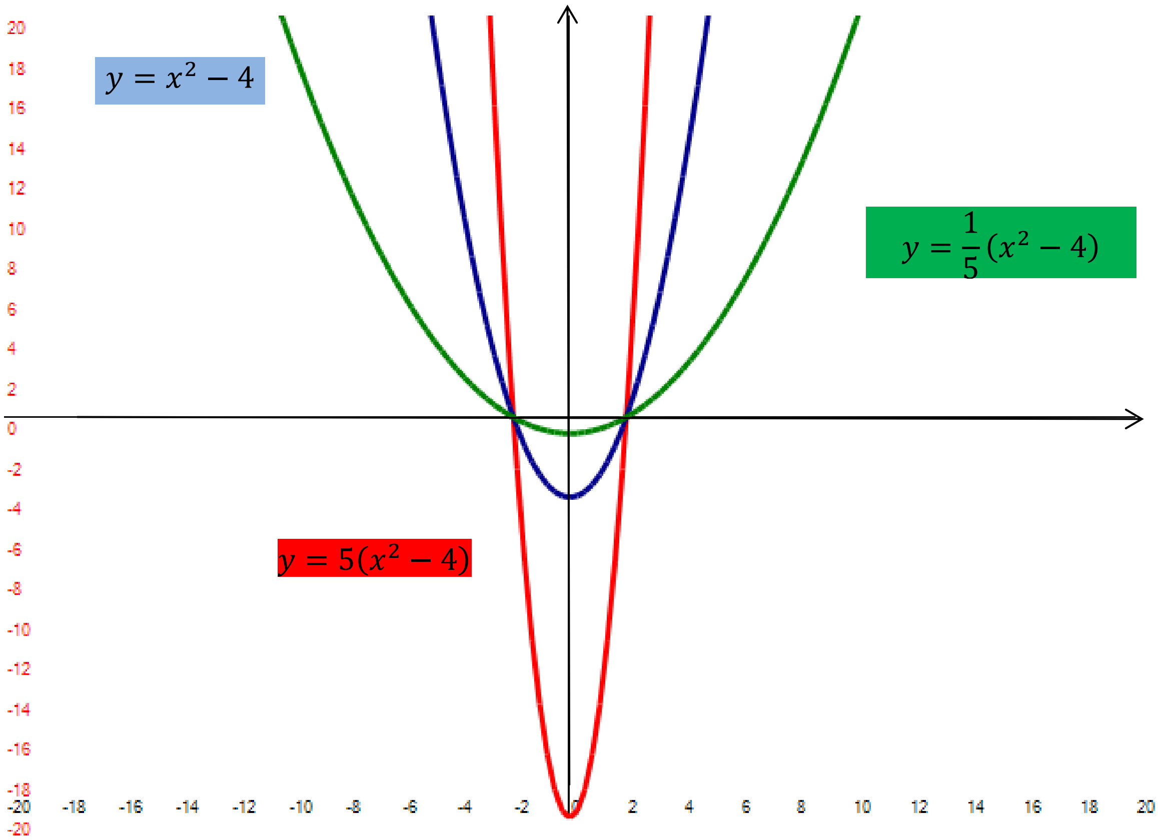


Grafico di $\boldsymbol{y = kf(x)}$

Per poter realizzare il grafico di tale funzione occorre richiamare il concetto di dilatazione con centro nell'origine degli assi.



La dilatazione con centro nell'origine degli assi è una trasformazione che assegnati due coefficienti di dilatazione h e k rispettivamente orizzontale e verticale, manda un punto $P(x, y)$ del piano, nel punto $P(hx, ky)$.

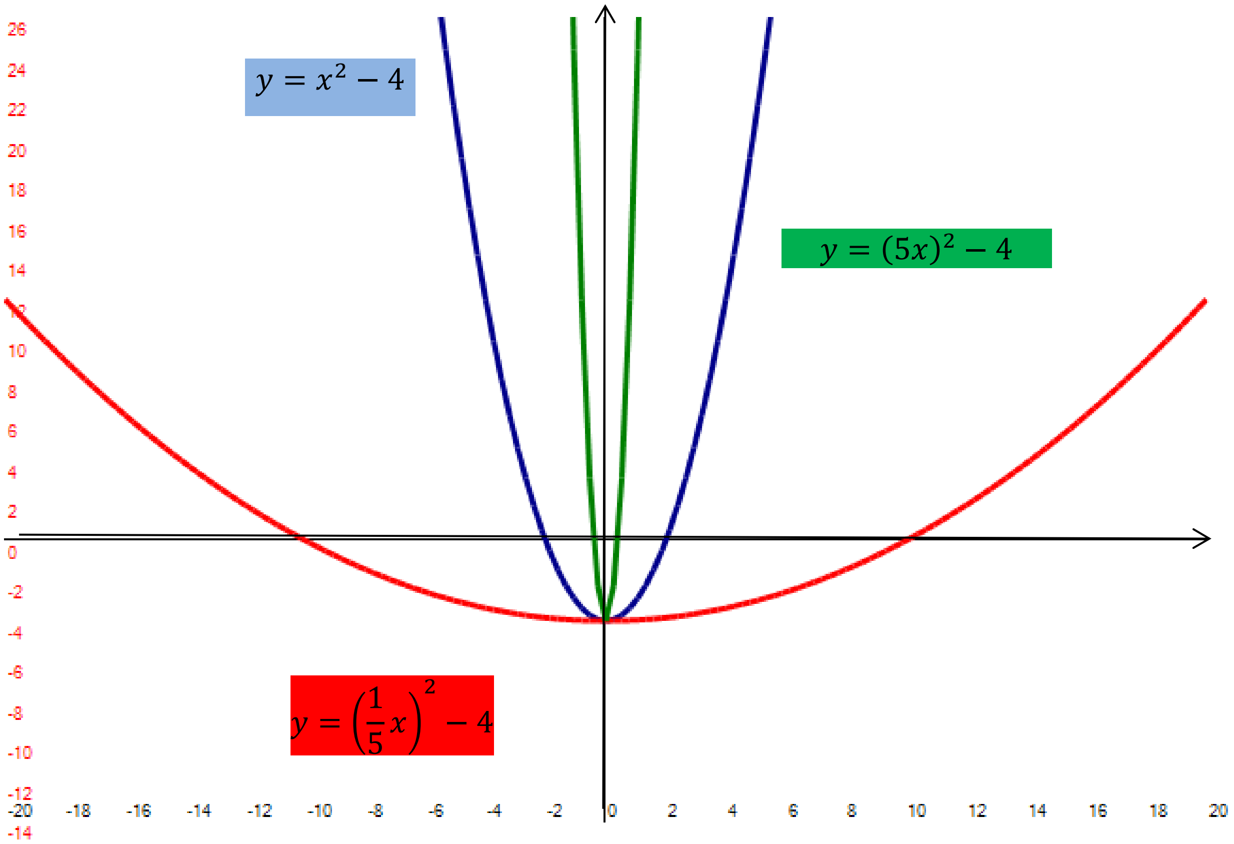
Considerando una dilazione con centro nell'origine, con fattore di dilatazione orizzontale $h = 1$ e fattore di dilatazione verticale uguale a k, si avrà che la dilatazione trasforma l'equazione $y = f(x)$ in $y = kf(x)$. Il grafico di $y = kf(x)$ si otterrà moltiplicando per k le ordinate della funzione di partenza.

- Grafico di $\boldsymbol{y = f(hx)}$

Con considerazioni analoghe a quelle del punto precedente possiamo costruire il grafico di questa funzione. La trasformazione da applicare sarà ancora una dilatazione con centro nell'origine, con fattore di dilatazione orizzontale $\frac{1}{h}$, fattore di dilatazione verticale $k = 1$, che trasforma la funzione $y = f(x)$ in $y = f(hx)$.

Se $0 < h < 1$ si allarga il grafico, viceversa, se $h > 1$ il grafico si comprime.

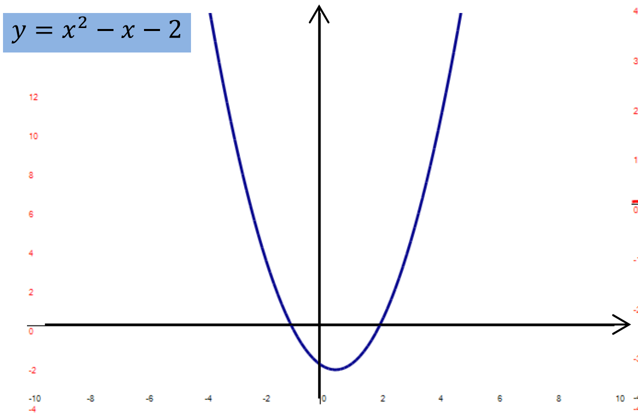
Il grafico di $y = f(hx)$ si otterrà moltiplicando per h le ascisse della funzione di partenza.

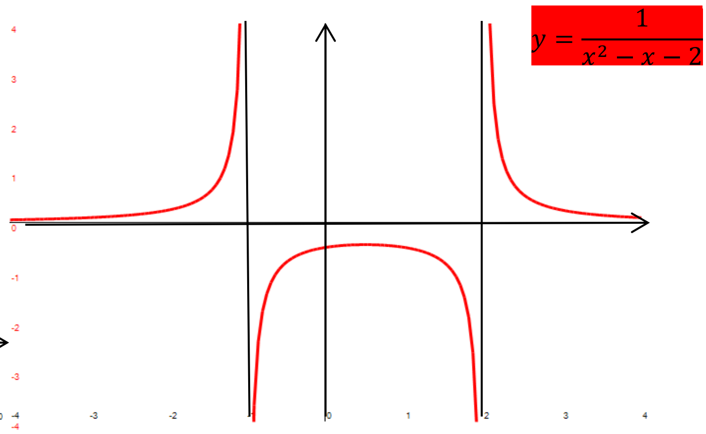


- Grafico di $\boldsymbol{y = \frac{1}{f(x)}}$

Per disegnare il reciproco $\frac{1}{f(x)}$ di una funzione $f(x)$, partendo dal grafico della funzione, si devono applicare le seguenti regole:

- in corrispondenza degli zeri di $f(x)$ (cioè nei punti d'intersezione con l'asse x) la funzione $\frac{1}{f(x)}$ diventa $\frac{1}{0}$ quindi non esiste e tali punti si trasformano in asintoti verticali.
- viceversa dove f(x) tende ad infinito $\frac{1}{f(x)}$ tende a 0, cioè l'asse x diventa un asintoto orizzontale.
- il punto di intersezione di $f(x)$ con l'asse y nella funzione $\frac{1}{f(x)}$ diventa il reciproco del punto d'intersezione della funzione di partenza $f(x)$.

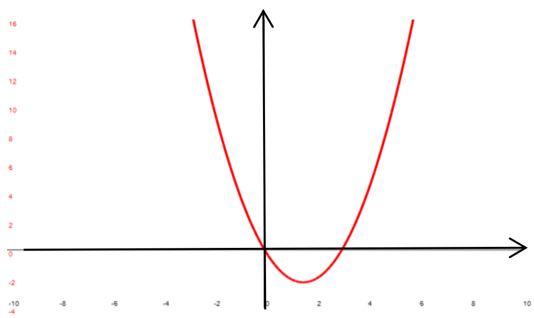




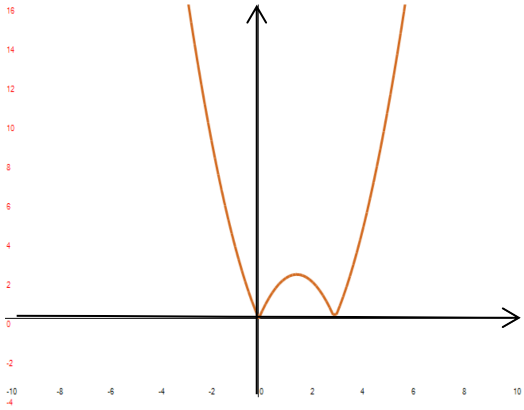
ESEMPIO:

Tracciare il grafico della $y = |x^2 - 3x| - 2$.

Partiamo dal grafico di $y = x^2 - 3x$



Quindi tracciamo il grafico della funzione $y = |x^2 - 3x|$



Ed infine il grafico della $y = |x^2 - 3x| - 2$