CAPITOLO 2

LE RENDITE CERTE

1. LE PROGRESSIONI

Si definisce successione una funzione $f: N \to R$ che associa ad agni numero naturale un numero reale. Come esempio consideriamo la funzione $f: n \to 2n$, cioè la funzione che associa ad ogni $n \in N$ il valore $2n$, indicando con a_n , il valore questa espressione, si avrà:

$se\ n = 0 \qquad a_0 = 0$

$se\ n = 1 \qquad a_1 = 2$

$se\ n = 2 \qquad a_2 = 4$

$se\ n = 3 \qquad a_3 = 6$

$se\ n = 4 \qquad a_4 = 8$

E così via.

Per individuare una successione bisogna dare l'espressione di a_n che genera i numeri reali e rappresenta il termine generale della successione.

Sono esempi di successioni le espressioni:

$a_n = 3n + 1$

$a_n = n^2$

$a_n = \frac{n+1}{n}$ se n≠0

$a_n = n^3 + 1$

Una successione può essere finita o infinita a seconda che sia costituita da un numero finito o infinito di termini.

Analizziamo ora due particolari successioni, le progressioni aritmetiche e geometriche.

1. Le progressioni aritmetiche

Si definisce progressione aritmetica una successione di più termini reali dove risulta costante la differenza fra un termine e il suo precedente. A tale differenza si dà il nome di *ragione* (o differenza) e si indica con *d*. Il termine generale di una progressione aritmetica può essere scritto come:

$a_k = a_{k-1} + d$ oppure $a_{k-1} = a_k - d \qquad (con\ k \geq 2)$

Si osserva che:

- $d > 0$ la progressione si dice crescente essendo $a_k > a_{k-1}$
- $d < 0$ la progressione si dice decrescente essendo $a_k < a_{k-1}$
- $d = 0$ la progressione si dice costante essendo $a_k = a_{k-1}$.

Una progressione si dice finita se è costituita da un numero finito di termini, infinita in caso contrario. Noi tratteremo solo progressioni finite.

Considerata una progressione aritmetica finita di n termini e di ragione *d*, si può dimostrare che vale la relazione:

$$a_k = a_h + (k-h)d$$

dove a_k *e* a_h sono due qualunque termini della progressione considerata. Se poniamo $k = n$ e $h = 1$ la relazione precedente diventa:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Che permette di determinare un qualunque termine della progressione, noti il primo termine a_1 e la ragione *q* della progressione aritmetica.

ESEMPI

1. Trovare il dodicesimo termine di una progressione aritmetica di ragione $d = -2$, avente $a_1 = 3$.

$$a_{12} = 3 + (12-1) \cdot (-2) = -19$$

2. In una progressione aritmetica se $a_6 = 20$ $d = -3$, determinare a_{12}.

   Dalla relazione $a_k = a_h + (k-h)d$ si ricava che

$$a_{12} = 20 + (12-6)(-3) = 2$$

3. Data una progressione aritmetica con primo termine $a_1 = 4$ e il settimo termine $a_7 = -12$, determinare la ragione *d*.

   Dalla relazione $a_k = a_h + (k-h)d$ si ricava che

   $-12 = 4 + (7-1)d$ e svolgendo i conti si ottiene $d = -\frac{8}{3}$

Considerata una progressione aritmetica finita di n termini e di ragione *d*, si può dimostrare che se

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$$

sono i primi n termini della progressione aritmetica, allora la somma dei primi n termini di questa progressione è data dalla relazione seguente:

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

ESEMPI

1. Calcolare la somma dei primi 10 termini di una progressione aritmetica dove $a_1 = 3$ e $d = 4$.

Ricaviamo $a_{10} = 3 + (10 - 1) \cdot 4 = 39$

Quindi $S_{10} = 10 \cdot \frac{3+39}{2} = 210$

2. Calcolare la somma dei primi n numeri naturali pari.

$$S_{pari} = n \cdot \frac{2 + 2n}{2} = n(n + 1)$$

2. Le progressioni geometriche

Si definisce progressione geometrica una successione di più numeri reali tali che risulta costante il rapporto fra un termine e il suo precedente. A tale rapporto si dà il nome di *ragione* e si indica con *q*. Considerata una progressione geometrica finita di n termini e di ragione *q*, si può dimostrare che vale la relazione:

$$a_k = a_h \cdot q^{k-h}$$

dove a_k e a_h sono due qualunque termini della progressione considerata. Se poniamo $k = n$ e $h = 1$ la relazione precedente diventa:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

che permette di determinare un qualunque termine della progressione noti il primo termine a_1 e la ragione *q* della progressione geometrica.

ESEMPI

1. Trovare il quinto termine di una progressione geometrica di ragione $q = -2$, avente $a_1 = 6$.

$$a_5 = 6 \cdot (-2)^5 = -192$$

2. Data una progressione geometrica con terzo termine $a_3 = 12$ e ragione $q = 3$. Determina il primo termine della progressione.

Dalla relazione $a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$ si ottiene $a_1 = \frac{12}{3^{3-1}} = \frac{4}{3}$

Considerata una progressione geometrica finita, di n termini e di ragione *q* si può dimostrare che se

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$$

sono i primi n termini della progressione geometrica, allora la somma dei primi n termini di questa progressione è data dalla relazione seguente:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Vediamo la dimostrazione:

la somma dei primi n termini della progressione è

$$S_n = a_1 \ + \ a_2 + a_3 + \cdots + \ a_{n-1} \ + \ a_n$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per la ragione q e otteniamo

$$q \cdot S_n = qa_1 \ + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} \ + qa_n$$

E per la definizione di progressione geometrica si avrà:

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + \cdots + \ a_{n-1} \ + \ a_n + qa_n$$

Sottraendo membro a membro la prima e la terza relazione si ottiene:

$$S_n - qS_n = a_1 - qa_n$$

Quindi poiché $a_n = a_1 q^{n-1}$ si ha: $S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^{n-1} = a_1 - a_1 q^n = a_1(1-q^n)$

Da cui si deduce: $S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$ e si arriva alla somma:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

ESEMPIO

Calcolare la somma dei primi 5 termini di una progressione aritmetica dove $a_1 = 3$ e $q = 4$. Ricaviamo

$$S_5 = 3 \cdot \frac{1-4^5}{1-4} = 1.023$$

2. DEFINIZIONE E CLASSIFICAZIONE DI RENDITA

Si definisce **rendita una successione** di capitali che si pagano o si riscuotono a scadenze determinate.

Le rendite possono essere certe o aleatorie (es. vitalizia), sono certe quelle rendite per le quali il pagamento o la riscossione delle varie rate non è subordinato al verificarsi di alcun avvenimento casuale; sono aleatorie quelle rendite per le quali il pagamento o la riscossione delle varie rate è subordinato al verificarsi o no di un evento aleatorio.

Noi ci occuperemo solo delle rendite certe.

Ogni capitale è chiamato **rata** o termine della rendita e si indica con R. Ogni rata può avere importo costante o variabile ed essere disponibile ogni anno (annualità) oppure può essere frazionabile cioè essere disponibile ogni sei mesi (semestralità), ogni tre mesi (trimestralità) e così via.

Si dice **periodo** l'intervallo di tempo che intercorre tra una rata e la successiva.

Si definisce **durata** di una rendita il tempo che intercorre tra l'inizio e la fine della rendita.

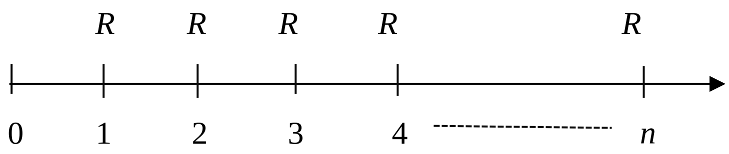
Esempi di rendite:

1. il mutuo contratto per l'acquisto di una casa;
2. le somme versate periodicamente per costituire un capitale;
3. rate delle assicurazioni;
4. il canone d'affitto;
5. il rimborso di un qualsiasi debito.

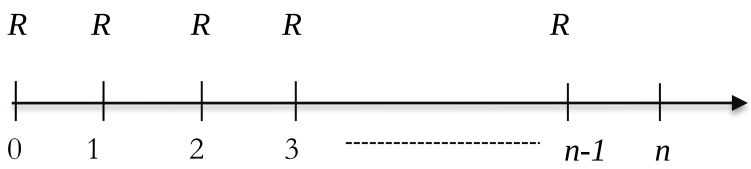
Classificazione delle rendite:

Le rendite si possono distinguere in base alla durata, all'importo della rata, alla decorrenza, alla periodicità e alla scadenza della rata.

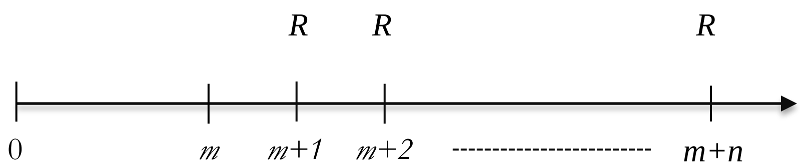
- **Rendita temporanea o perpetua:** temporanea se è costituita da un numero finito di rate; perpetua se è costituita da un numero illimitato di rate.
- **Rendita immediata o differita:** immediata se la decorrenza della prima rata coincide con il momento della stipulazione del contratto; differita quando tra il momento della stipulazione del contratto e la decorrenza della rata intercorre un intervallo di tempo, detto differimento.
- **Rendita a rate costanti o a rate variabili:** a rate costanti se l'importo della rata non cambia durante tutta la durata della rendita, a rate variabili se diversamente possono esserci delle variazioni nell'importo delle rate.
- **Rendita anticipata o posticipata:** anticipata se le rate scadono all'inizio di ogni periodo; posticipata se le rate scadono alla fine di ogni periodo.



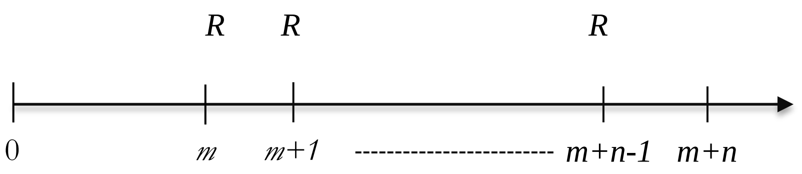
Rendita immediata posticipata di n rate



Rendita immediata anticipata di n rate



Rendita differita di m periodi di n rate posticipate



Rendita differita di m periodi di n rate anticipate

Uno dei problemi più indicativi riguardanti le rendite è il determinare il valore di tutte le rate a una determinata epoca (valore della rendita).

Calcolare il valore di una rendita assume particolare significato quando:

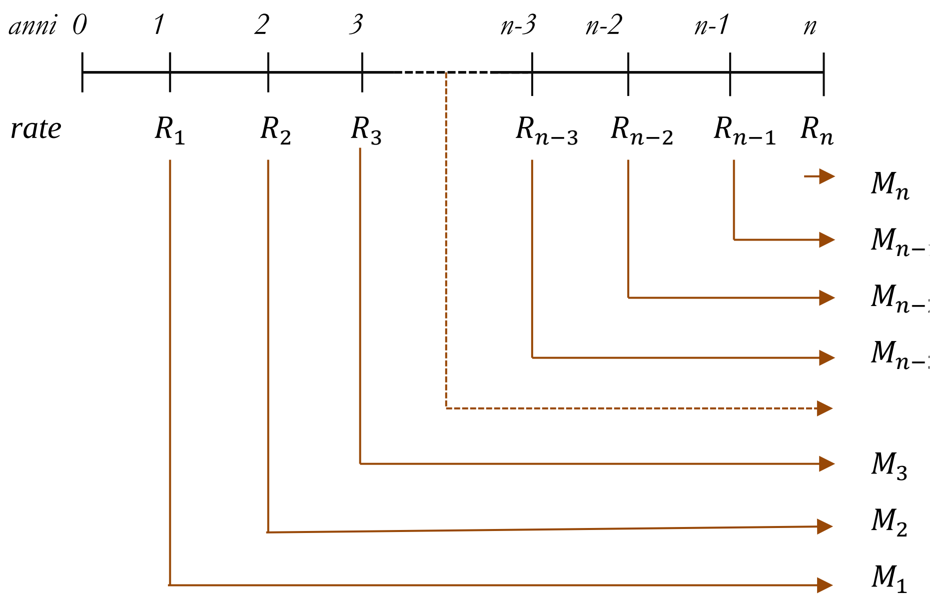
- coincide (o segue) con l'ultima scadenza, in questo caso il valore si chiama montante.
- coincide (o precede) con la prima rata in questo caso il valore si chiama valore attuale.

Si definisce **montante** o valore finale di una rendita a una certa data, la somma dei montanti delle sue singole rate riferite alla fine dell'ultimo periodo.

Si definisce **valore attuale** o valore iniziale di una rendita a una certa data, la somma dei valori attuali delle singole rate in cui viene costituita la rendita stessa.

3. MONTANTE DI UNA RENDITA IMMEDIATA POSTICIPATA

Consideriamo una rendita annua posticipata immediata, costituita da *n* rate annue di valore costante R al tasso composto *i*. Per calcolare il montante di questa rendita prendiamo in considerazione il seguente schema:



I montanti delle n rate sono dati da:

$M_1 = R(1+i)^{n-1}$

$M_2 = R(1+i)^{n-2}$

$M_3 = R(1+i)^{n-3}$

…………………

$M_{n-3} = R(1+i)^3$

$M_{n-2} = R(1+i)^2$

$M_{n-1} = R(1+i)$

$M_n = R$

Il montante della rendita sarà quindi:

$$M = M_n + M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} \ldots + M_3 + M_2 + M_1$$

Sostituendo si ottiene:

$$M = R[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \cdots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

Gli n termini al secondo membro all'interno della parentesi quadra, sono termini consecutivi di una progressione geometrica avente il primo termine $a_1 = 1$ e ragione $q = (1+i)$.

Essendo la somma di n termini di una progressione geometrica con $q > 1$:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Tale somma S si può scrivere come:

$$1 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

e s'indica con il simbolo $s_{n|i}$, che si legge "esse figurato *n* al tasso *i*".

Quindi si avrà:

$$\boxed{s_{n|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Il montante di una rendita posticipata, temporanea a rate costanti R, è dato dalla relazione:

$$\boxed{M = R \cdot s_{n|i}}$$

Possiamo osservare che se poniamo $R = 1$, la relazione precedente diventa $M = s_{n|i}$, da cui si conclude che l'operatore $\boldsymbol{s_{n|i}}$ **rappresenta il montante** di una **rendita posticipata** temporanea costituita da **n rate unitarie al tasso i.**

ESEMPIO

Determinare il montante di una rendita posticipata costituita da 7 rate annue dell'importo di 8.000 € l'una al tasso del 3,5% annuo.

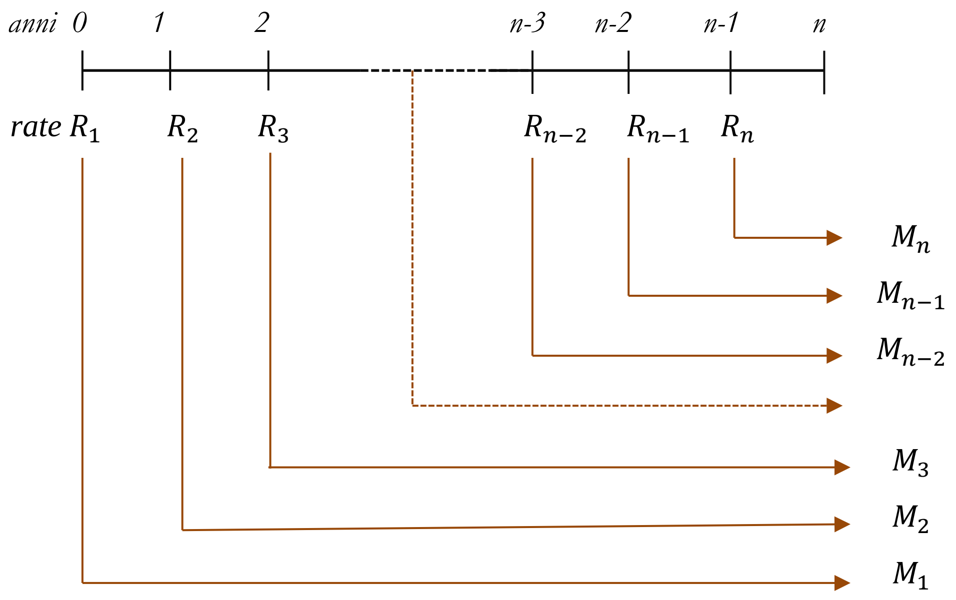
Dati: $R = 8.000$ €; $i = 0{,}035$; $n = 7\ rate$

Applicando la formula $M = R \cdot s_{n\rceil i}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$M = 8.000 \frac{(1+0{,}035)^7 - 1}{0{,}035} = 62.235,,26$ €.

4. MONTANTE DI UNA RENDITA IMMEDIATA ANTICIPATA

Consideriamo una rendita annua anticipata immediata, costituita da *n* rate annue di valore costante R al tasso composto *i*. Per calcolare il montante di questa rendita prendiamo in considerazione il seguente schema



I montanti delle n rate sono dati da:

$M_1 = R(1+i)^n$

$M_2 = R(1+i)^{n-1}$

$M_3 = R(1+i)^{n-2}$

…………………

$M_{n-2} = R(1+i)^3$

$M_{n-1} = R(1+i)^2$

$M_n = R(1+i)$

Il montante della rendita sarà quindi:

$$M = M_n + M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} \dots + M_3 + M_2 + M_1$$

Sostituendo si ottiene:

$$M = R[(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n]$$

Gli n termini al secondo membro all'interno della parentesi quadra sono termini consecutivi di una progressione geometrica avente il primo termine $a_1 = (1+i)$ e ragione $q = (1+i)$.

Tale somma S può essere scritta così:

$$(1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

e si indica con il simbolo $\ddot{s}_{n\rceil i}$ che si legge "esse anticipato figurato *n* al tasso *i*".

Quindi si avrà:

$$\boxed{\ddot{s}_{n\rceil i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)}$$

Da cui si conclude, che il montante di una rendita anticipata, temporanea a rate costanti R, è dato dalla relazione:

$$\boxed{M = R \cdot \ddot{s}_{n\rceil i}}$$

Possiamo osservare che se poniamo $R = 1$, la relazione precedente diventa $M = \ddot{s}_{n\rceil i}$ da cui si conclude che l'operatore $\ddot{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{n\rceil i}}$ **rappresenta il montante** di una **rendita anticipata** temporanea costituita da **n rate unitarie al tasso i.**

Si osserva inoltre che, confrontando le relazioni $s_{n\rceil i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ e $\ddot{s}_{n\rceil i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$, gli operatori $s_{n\rceil i}$ e $\ddot{s}_{n\rceil i}$ sono legati dalla relazione,

$$\boxed{\ddot{s}_{n\rceil i} = s_{n\rceil i}(1+i)}$$

quindi il montante M di una rendita anticipa di rata R può essere anche scritto come:

$$M = R \cdot s_{n\rceil i}(1+i)$$

ESEMPIO

Determinare il montante di una rendita anticipata costituita da 5 rate annue dell'importo di 10.000 € l'una al tasso del 4% annuo..

Dati: $R = 10.000$ €; $i = 0{,}04$; $n = 5\ rate$

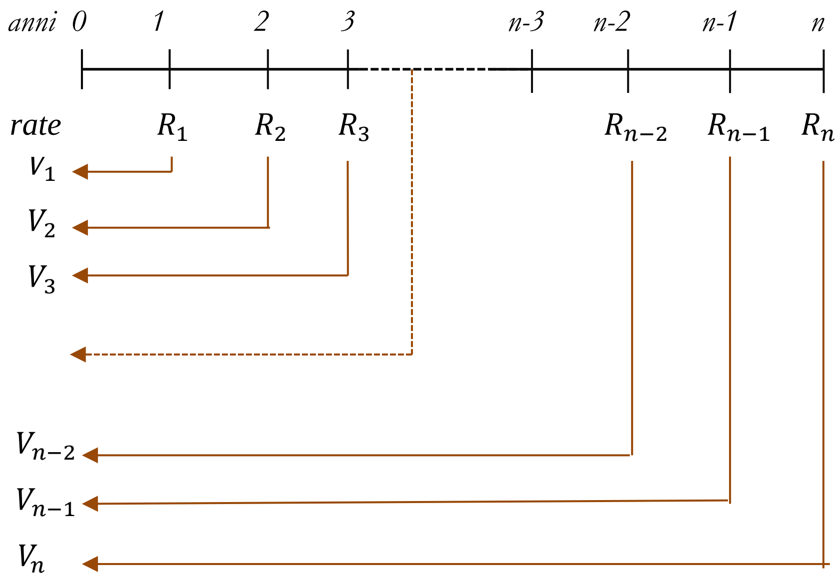
Applicando la formula $S = R \cdot \ddot{s}_{n\rceil i}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$M = 10.000 \frac{(1+0{,}04)^5 - 1}{0{,}04}(1 + 0{,}04) = 56.329{,}75$ €.

5. VALORE ATTUALE DI UNA RENDITA POSTICIPATA

Consideriamo una rendita annua posticipata immediata, costituita da *n* rate annue di valore costante R al tasso composto *i*.

Per calcolare il valore attuale di questa rendita prendiamo in considerazione il seguente schema:



I valori attuali delle n rate sono dati da:

$V_1 = R(1+i)^{-1}$

$V_2 = R(1+i)^{-2}$

$V_3 = R(1+i)^{-3}$

…………………

$V_{n-2} = R(1+i)^{-(n-2)}$

$V_{n-1} = R(1+i)^{-(n-1)}$

$V_n = R(1+i)^{-n}$

Il montante della rendita sarà quindi:

$$V = V_n + V_{n-1} + V_{n-2} + V_{n-3} \ldots + V_3 + V_2 + V_1$$

Sostituendo si ottiene:

$$V = R\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \cdots + (1+i)^{-(n-2)} + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}\right]$$

Gli n termini al secondo membro all'interno della parentesi quadra sono termini consecutivi di una progressione geometrica avente il primo termine $a_1 = (1+i)^{-1}$ e ragione $q = (1+i)^{-1}$. Ricordando che la somma di n termini di una progressione geometrica con $q < 1$:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

si ottiene:

$$(1+i)^{-1} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)\cdot[1-(1+i)^{-1}]} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{1+i-1} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

e indicando tale somma con il simbolo $a_{n]i}$ che leggiamo "a figurato *n* al tasso *i*" si avrà:

$$a_{n]i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

che è equivalente alla relazione:

$$a_{n]i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Da cui si conclude che il valore attuale di una rendita posticipata, temporanea a rate costanti R, è dato dalla relazione:

$$V = R \cdot a_{n]i}$$

Si osserva che ponendo $R = 1$, nella relazione precedente si ottiene $V = a_{n]i}$ da cui si conclude che l'operatore $\boldsymbol{a_{n]i}}$ **rappresenta il valore attuale** di una **rendita posticipata** temporanea costituita da **n rate unitarie al tasso i.**

ESEMPIO

Calcoliamo il valore attuale di una rendita posticipata costituita da 8 rate annue dell'importo di 15.000 € l'una al tasso del 6.5% annuo..

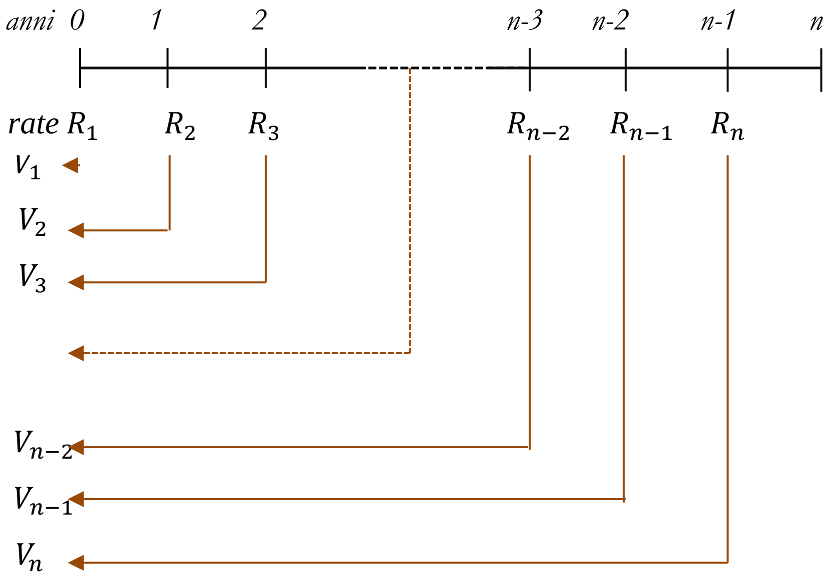
Dati: $R = 15.000$ €; $i = 0{,}065$; $n = 8\, rate$

Applicando la formula $V = R \cdot a_{n]i}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$V = 15.000 \frac{1-(1+0{,}065)^{-8}}{0{,}065} = 91.331{,}26$ €.

6. VALORE ATTUALE DI UNA RENDITA ANTICIPATA

Consideriamo una rendita annua anticipata immediata, costituita da *n* rate annue di valore costante R al tasso composto *i*. Per calcolare il valore attuale di questa rendita prendiamo in considerazione il seguente schema:



I valori attuali delle n rate sono dati da:

$V_1 = R$

$V_2 = R(1+i)^{-1}$

$V_3 = R(1+i)^{-2}$

…………………

$V_{n-2} = R(1+i)^{-(n-3)}$

$V_{n-1} = R(1+i)^{-(n-2)}$

$V_n = R(1+i)^{-(n-1)}$

Il valore attuale della rendita sarà quindi:

$$V = V_n + V_{n-1} + V_{n-2} + V_{n-3} \dots + V_3 + V_2 + V_1$$

Sostituendo si ottiene:

$$V = R\left[1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \cdots + (1+i)^{-(n-2)} + (1+i)^{-(n-1)}\right]$$

Gli n termini al secondo membro all'interno della parentesi quadra sono termini consecutivi di una progressione geometrica avente il primo termine $a_1 = (1+i)^{-1}$ e ragione $q = (1+i)^{-1}$. Tale somma S può essere scritta così:

$$1 \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\left[1-\frac{1}{(1+i)}\right]} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{1+i-1}{(1+i)}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{i}{(1+i)}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$$

e si indica con il simbolo $\ddot{a}_{n\rceil i}$ che si legge "a anticipato figurato *n* al tasso *i*". Quindi si avrà:

$$\boxed{\ddot{a}_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)}$$

Da cui si conclude che il valore attuale di una rendita posticipata, temporanea a rate costanti R, è dato dalla relazione:

$$V = R \cdot \ddot{a}_{n\rceil i}$$

Confrontando le relazioni $a_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ e $\ddot{a}_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$, si osserva che gli operatori $a_{n\rceil i}$ e $\ddot{a}_{n\rceil i}$ sono legati dalla relazione

$$a_{n\rceil i} = \ddot{a}_{n\rceil i}(1+i)$$

quindi il valore attuale di una rendita anticipa di rata R può essere anche scritto come:

$$V = R \cdot a_{n\rceil i}(1+i)$$

Posiamo osservare che ponendo $R = 1$, nella relazione $V = R\ddot{a}_{n\rceil i}$ si ottiene $V = \ddot{a}_{n\rceil i}$ quindi l'operatore $\boldsymbol{\ddot{a}_{n\rceil i}}$ **rappresenta il valore attuale** di una **rendita anticipata** temporanea costituita da **n rate unitarie al tasso i.**

ESEMPIO

Calcoliamo il valore attuale di una rendita anticipata costituita da 10 rate annue dell'importo di 1.000 € l'una al tasso del 5% annuo.

Dati: $R = 1.000$ €; $i = 0{,}05$; $n = 10\ rate$

Applicando la formula $V = R \cdot \ddot{a}_{n\rceil i}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$V = 1.000\frac{1-(1+0{,}05)^{-10}}{0{,}05}(1+0{,}05) = 8.107{,}82\text{ €}.$$

7. RENDITE TEMPORANEE DIFFERITE

Sappiamo che una rendita si dice differita quando non inizia all'atto della stipulazione del contratto, ma dopo un certo periodo; risulta chiaro che questa circostanza non influisce sul calcolo del montante, perché esso viene calcolato alla fine della durata della rendita e si basa sul numero delle sue rate. Il differimento della rendita invece influisce sul calcolo del valore attuale perché si deve scontare il montante per un tempo maggiore. Vediamo in che modo.

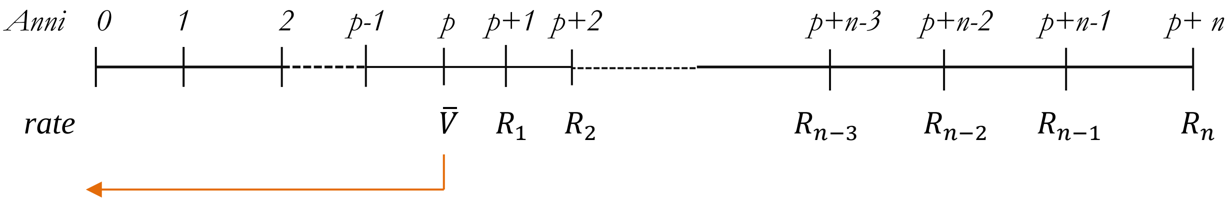
1. Valore attuale di una rendita temporanea differita e posticipata

Consideriamo una rendita posticipata costituita da *n* rate annue R costanti, differita di *p* anni, al tasso annuo *i,* la prima rata viene pagata o riscossa al periodo p+1, la seconda rata al periodo p+2 e così via.

- Il valore attuale che indichiamo con $\bar{V}$, riferito al tempo p, cioè all'inizio della rendita, è dato da $\bar{V} = R \cdot a_{n\rceil i}$.

- Il valore attuale effettivo V della rendita, cioè riferita al tempo 0, si ottiene moltiplicando $\bar{V}$per il fattore di sconto $(1+i)^{-p}$.

Prendendo in considerazione il seguente scema:



Differimento $V = \bar{V}(1+i)^{-p}$

possiamo dedurre la relazione:

$$V = R \cdot a_{n\rceil i}(1+i)^{-p}$$

Indicando con $_{p}/a_{n\rceil i}$ (che si legge "a figurato *n* al tasso *i*, differito *p")* l'espressione $a_{n\rceil i}(1+i)^{-p}$, si ottiene la relazione equivalente:

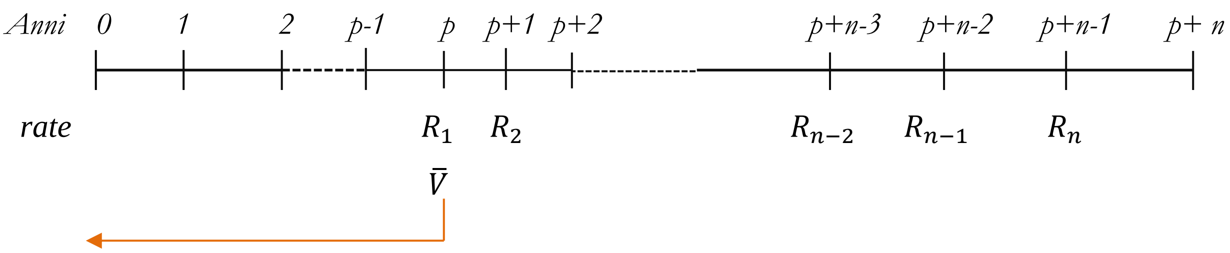
$$V = R \cdot {}_{p}/a_{n\rceil i}$$

2. Valore attuale di una rendita temporanea differita e anticipata

Consideriamo una rendita anticipata costituita da *n* rate annue R costanti, differita di *p* anni, al tasso annuo *i,* la prima rata viene pagata o riscossa al periodo p, la seconda rata al periodo p+1 e così via.

- Il valore attuale che indichiamo con $\bar{V}$, riferito al tempo p, cioè all'inizio della rendita, è dato da $\bar{V} = R \cdot \ddot{a}_{n\rceil i}$.
- Il valore attuale effettivo V della rendita, cioè riferita al tempo 0, si ottiene moltiplicando $\bar{V}$per il fattore di sconto $(1+i)^{-p}$.

Prendendo in considerazione il seguente scema:



Differimento$V = \bar{V}(1+i)^{-p}$

possiamo dedurre la relazione:

$$V = R \cdot \ddot{a}_{n\rceil i}(1+i)^{-p}$$

Indicando con $_{p}/\ddot{a}_{p/n\rceil i}$ (che si legge "a anticipato figurato *n* al tasso *i*, differito *p")* l'espressione $a_{n\rceil i}(1+i)(1+i)^{-p} = a_{n\rceil i}(1+i)^{1-p}$, si ottiene la relazione equivalente:

$$V = R \cdot_{p}/\ddot{a}_{n]i}$$

3. Relazione tra le due rendite

Dalla relazione $a_{n]i}(1+i) = \ddot{a}_{n]i}$ moltiplicando entrambi i membri per $(1+i)^{-p}$ si ottiene:

$$a_{n]i}(1+i)(1+i)^{-p} = \ddot{a}_{n]i}(1+i)^{-p}$$

che si trasforma nella $$a_{n]i}(1+i)^{1-p} = \ddot{a}_{n]i}(1+i)^{-p}$$

da cui si deduce: $$_{p-1}/a_{n]i} = {}_{p}/\ddot{a}_{n]i}$$

Possiamo concludere che il valore attuale di una rendita posticipata e differita di p-1 periodi è uguale al valore attuale di una analoga rendita anticipata differita p periodi.

Questo risulta utile perché spesso negli esercizi non è specificato quale sia il differimento, ma viene indicato solo il tempo in cui avviene la riscossione, quindi il problema può avere una duplice interpretazione.

ESEMPI

1) Determinare il valore attuale di una rendita differita di 2 anni, costituita da 7 rate annue posticipate dell'importo di 2.000 € l'una al tasso del 3,5% annuo.

Dati: $R = 2.000$ €; $i = 0{,}035$; $p = 2\ anni$; $n = 7\ rate$

Applicando la formula $V = R \cdot_{p}/a_{n]i}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$V = 2.000\frac{1-(1+0{,}035)^{-7}}{0{,}035}(1+0{,}035)^{-2} = 11.416\ €.$$

2) Determinare il valore attuale di una rendita differita di 6 mesi, costituita da 4 rate annue anticipate dell'importo di 5.000 € l'una al tasso del 5% annuo.

Dati: $R = 5.000$ €; $i = 0{,}05$; $p = 18\ mesi$; $n = 4\ rate$

Applicando la formula $V = R \cdot_{p}/\ddot{a}_{n]i}$ e sostituendo i dati si ottiene

$$V = 5.000\frac{1-(1+0{,}05)^{-4}}{0{,}05}(1+0{,}05)^{1-2} = 16.885{,}48\ €$$

8. RENDITE PERPETUE

Una rendita si dice perpetua quando ha un numero illimitato di rate oppure quando non si conosce quale sia il loro numero. Sono esempi di rendite perpetue gli interessi prodotti da un lascito, particolari titoli di stato, l'usufrutto su terreni in uso perpetuo ecc. Poiché in una rendita perpetua, anticipata o posticipata, non si conosce il numero delle rate, non ha senso calcolare di montante non potendo stabilire l'ultima rata; invece possiamo determinarne il valore attuale.

a) Valore attuale di una rendita posticipata e illimitata.

Consideriamo la relazione:

$$a_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

che scritta per esteso diventa:

$$a_{n\rceil i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \cdots + (1+i)^{-(n-2)} + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}$$

se facciamo tendere n all'infinito si avrà:

$$a_{\infty\rceil i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + (1+i)^{-4} + \cdots$$

Questa espressione rappresenta la somma degli infiniti termini consecutivi di una progressione geometrica il primo termine $a_1 = (1+i)^{-1}$ e ragione $q = (1+i)^{-1}$. Ricordando che la somma S dei termini di una progressione geometrica illimitata, avente primo termine a_1 e ragione q , è $S = \frac{a_1}{1-q}$, si avrà:

$$a_{\infty\rceil i} = \frac{(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1+i}{1+i-1} = \frac{1}{i}$$

Da qui deduciamo che il valore attuale, di una rendita perpetua posticipata di rata R è il rapporto tra l'importo della rata e il tasso *i:*

$$V = R \cdot \frac{1}{i} = \frac{R}{i}$$

b) Valore attuale di una rendita anticipata e illimitata.

Se la rendita è perpetua anticipata, con un procedimento analogo al precedente e considerando la relazione: $\ddot{a}_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$, si ottiene: $\ddot{a}_{\infty\rceil i} = a_{\infty\rceil i} \cdot (1+i)$, da cui deduciamo che il valore attuale, di una rendita perpetua anticipata di rata R è:

$$V = R \cdot \frac{(1+i)}{i}$$

c) Valore attuale di una rendita differita.

Nel caso di una rendita perpetua e differita dove la prima rata viene riscossa tra p periodi abbiamo le seguenti relazioni.

Rendita posticipata:

$${}_{p/}a_{\infty\rceil i} = a_{\infty\rceil i}(1+i)^{-p} = \frac{1}{i}(1+i)^{-p}$$

Quindi se la rata è R avremo:

$$V = R \cdot \frac{(1+i)^{-p}}{i}$$

Rendita anticipata:

$${}_{p}/\ddot{a}_{\infty\rceil i} = \ddot{a}_{\infty\rceil i}(1+i)^{-p} = \frac{1}{i}(1+i)^{1-p}$$

Quindi se la rata è R avremo:

$$V = R \cdot \frac{(1+i)^{1-p}}{i}$$

ESEMPI

1) Calcoliamo il valore attuale di una rendita perpetua posticipata sapendo che la rata è di 1.000 € e il tasso è del 3% annuo..

Dati: $R = 1.000$ €; $i = 0{,}03$;

Applicando la formula $V = R\frac{1}{i}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$V = 1.000\,\frac{1}{0{,}03} = 33.333{,}\bar{3}\ €.$$

2) Calcoliamo il valore attuale di una rendita perpetua anticipata sapendo che la rata è di 7.000 € e il tasso è del 2,5% annuo.

Dati: $R = 7.000$ €; $i = 0{,}025$;

Applicando la formula $V = R\frac{1+i}{i}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$V = 7.000\,\frac{1+0{,}025}{0{,}025} = 207.000\ €.$$

3) Viene venduto un terreno che rende in media annualmente 10.000€, valutati al 5% annuo. Calcolare quanto si riscuoterà dalla vendita del terreno sapendo che il reddito sarà disponibile solo fra 3 anni.

Dati: $R = 10.000$ €; $i = 0{,}05$; $p = 4$

Il prezzo del terreno è dato dal valore attuale di una rendita perpetua di 10.000€ annui, e poiché la rata si può riscuotere solo fra 3 anni, la rendita è differita di 2 anni e posticipata.

Applicando la formula $V = R\frac{(1+i)^{-p}}{i}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$V = 10.000\,\frac{(1+0{,}05)^{-2}}{0{,}05} = 181.405{,}90\ €.$$

9. PROBLEMI INVERSI

Nella determinazione di una rendita, abbiamo finora visto solo problemi diretti, cioè abbiamo determinato il montante o il valore attuale di una rendita conoscendo il valore della rata R, del tasso i e del numero delle rate n. Spesso, nei problemi e nella pratica viene richiesto di determinare la rata, o il tasso d'interesse o il numero delle rate, conoscendo il montante o il valore attuale.

Si hanno i seguenti tipi di problemi:

a) Determinazione della rata, noti il montante (o il valore attuale), il tasso e il numero delle rate.

b) Determinazione del numero delle rate, noti il montante (o il valore attuale), la rata e il tasso d'interesse.

c) Determinazione del tasso d'interesse, noti il montante (o il valore attuale), la rata e il numero delle rate.

a) Determinazione della rata

Supponiamo di conoscere il montante, dovremo distinguere i due casi

1) Caso di una rendita posticipata.

   Partendo dalla formula $M = R \cdot s_{n\rceil i}$ e risolvendo rispetto R otteniamo:

$$R = \frac{M}{s_{n\rceil i}}$$

2) Caso di una rendita anticipata.

   Partendo dalla formula $M = R \cdot \ddot{s}_{n\rceil i}$ e risolvendo rispetto R otteniamo:

$$R = \frac{M}{\ddot{s}_{n\rceil i}}$$

Se si conosce il valore attuale si avranno i seguenti due casi:

1) Caso di una rendita posticipata.

   Partendo dalla formula $V = R \cdot a_{n\rceil i}$ e risolvendo rispetto R otteniamo:

$$R = \frac{V}{a_{n\rceil i}}$$

2) Caso di una rendita anticipata.

   Partendo dalla formula $V = R \cdot \ddot{a}_{n\rceil i}$ e risolvendo rispetto R otteniamo:

$$R = \frac{V}{\ddot{a}_{n\rceil i}}$$

b) Determinazione del numero delle rate.

Supponiamo di conoscere il montante e analizziamo i due seguenti casi:

1) Caso di una rendita posticipata.

Dalla formula del montante di una rendita posticipata $M = R \cdot s_{n\rceil i}$ ricaviamo $s_{n\rceil i} = \frac{M}{R}$, equivalente a $\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{M}{R}$ cioè $(1+i)^n = i \cdot \frac{M}{R} + 1$. Passando ai logaritmi, si avrà:

$$n = \frac{\text{Log}\left(i \cdot \frac{M}{R} + 1\right)}{\text{Log}(1+i)}$$

2) Caso di una rendita anticipata.

Dalla formula del montante di una rendita posticipata $M = R \cdot \ddot{s}_{n\rceil i}$ ricaviamo $\ddot{s}_{n\rceil i} = \frac{M}{R}$ equivalente a $\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) = \frac{M}{R}$ cioè $(1+i)^n = i \cdot \frac{M}{R} \cdot (1+i)^{-1} + 1$. Passando ai logaritmi, si avrà:

$$n = \frac{\text{Log}\left(\frac{i}{1+i} \cdot \frac{M}{R} + 1\right)}{\text{Log}(1+i)}$$

Procedendo in modo analogo se conosciamo il valore attuale avremo:

1) Caso di una rendita posticipata.

Dalla formula del valore attuale di una rendita posticipata $V = R \cdot a_{n\rceil i}$ ricaviamo $a_{n\rceil i} = \frac{V}{R}$ equivalente a $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{V}{R}$ cioè $(1+i)^{-n} = 1 - \frac{V}{R} \cdot i$, da cui $(1+i)^n = \frac{R}{R-Vi}$. Si osserva che il problema ha soluzione soltanto nel caso in cui $R > Vi$. Stabilito che il problema è risolubile, passando ai logaritmi, si avrà:

$$n = -\frac{\text{Log}\left(1 - \frac{V}{R} \cdot i\right)}{\text{Log}(1+i)}$$

2) Caso di una rendita anticipata.

Dalla formula del valore attuale di una rendita posticipata $V = R \cdot \ddot{a}_{n\rceil i}$ ricaviamo $\ddot{a}_{n\rceil i} = \frac{V}{R}$ equivalente a $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i) = \frac{V}{R}$ cioè $(1+i)^{-n} = 1 - \frac{V}{R} \cdot i \cdot (1+i)^{-1}$, da cui $(1+i)^n = \frac{R(1+i)}{R(1+i)-Vi}$. Analogamente a prima si osserva che il problema ha soluzione soltanto nel caso in cui $R(1+i) > Vi$. Stabilito che il problema è risolubile, passando ai logaritmi, si avrà:

$$n = -\frac{\mathrm{Log}\left(1 - \frac{V}{R} \cdot \frac{i}{1+i}\right)}{\mathrm{Log}(1+i)}$$

ESEMPI

1) Si vuole disporre tra 12 anni di un capitale di 50.000€ effettuando dei versamenti annui costanti posticipati, ad un tasso del 4% annuo.

Dati: $M = 50.000$ €; $i = 0{,}04$; $n = 12\ rate$

Applicando la formula $R = \frac{M}{s_{n|i}}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$R = \frac{0{,}04 \cdot 50.000}{(1+0{,}04)^{12} - 1} = 3.327{,}60€$$

2) Versando presso una banca rate di 600€ ciascuna, al tasso annuo del 4% annuo, si vuole costituire all'atto dell'ultimo versamento, la somma di 15.000€. quanti versamenti occorre effettuare?

Dati: $R = 7.000$ €; $M = 15.000€$ $i = 0{,}04$;

Applicando la formula $n = \frac{\mathrm{Log}\left(i \cdot \frac{M}{R} + 1\right)}{\mathrm{Log}(1+i)}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$n = \frac{\mathrm{Log}\left(0{,}04 \cdot \frac{15.000}{600} + 1\right)}{\mathrm{Log}(1+0{,}04)} = 17\ rate$$

3) Si vuole ammortizzare un debito di 20.000€ con 24 rate costanti posticipate. Calcolare il valore delle rate sapendo che il tasso è del 8%.

Dati: $V = 20.000$ €; $i = 0{,}08$; $n = 24\ \ rate$

Applicando la formula $R = V \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ sostituendo i dati si ottiene:

$$R = 20.000 \frac{0{,}08}{1-(1+0{,}08)^{-24}} = 1.899{,}56\ €$$

4) Viene ceduto il diritto d'incasso di una rendita posticipata, di rata 500€ al 6% annuo. sapendo che si incassano 2.000€, calcolare la durata della rendita.

Dati: $V = 120.000$ €; $i = 0{,}06$; $R = 500€$

Applicando la formula $n = -\frac{\mathrm{Log}\left(1 - \frac{V}{R} \cdot i\right)}{\mathrm{Log}(1+i)}$ sostituendo i dati si ottiene:

$$n = -\frac{\mathrm{Log}\left(1 - \frac{2.000}{500} \cdot 0{,}06\right)}{\mathrm{Log}(1+0{,}06)} = 5\ anni$$

E' chiaro che il numero di rate deve essere un numero intero, ma utilizzando tali formule difficilmente si otterrà una soluzione intera, generalmente si avrà $n' < n < n' + 1$, dove n' ed il suo successivo si possono dedurre usando le formule precedenti oppure, più semplicemente, dalle tavole finanziarie di $a_{n\rceil i}$, $\ddot{a}_{n\rceil i}$, $s_{n\rceil i}$, $\ddot{s}_{n\rceil i}$ nella colonna del tasso noto.

Stabilito l'intervallo cui appartiene n, è necessario procedere a modificare alcune condizioni del problema, come si vedrà in dettaglio nel capitolo seguente sulla costituzione di un capitale.

c) Determinazione del tasso

Il problema della ricerca del tasso è uno dei più significativi, in quanto rende possibile la valutazione della redditività di un investimento o l'onerosità di un mutuo. Noti la rata R, il numero di rate n e il montante M (o il valore attuale V), il problema consiste nel ricavare il tasso i dell'investimento. Si supponga di conoscere il montante M di una rendita posticipata. Inserendo tutti i dati nella formula del montante si ottiene:

$$M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

che è un'equazione in i che per $n > 3$ non ha soluzione elementare. Allora si affronta il problema in altro modo: si considera sempre la formula del montante:

$$M = R \cdot s_{n\rceil i}$$

e si ricava da questa che

$$s_{n\rceil i} = \frac{M}{R}$$

Noto n si cerca sulle tavole finanziarie di $s_{n\rceil i}$ (o con ragionamento analogo di $\ddot{s}_{n\rceil i}$) fra quali valori è compreso il rapporto M/R e si trovano due valori del tasso fra i quali è compreso il tasso incognito. Si procede poi ad un'interpolazione.

Analoghe considerazioni valgono nel caso in cui sia noto il valore attuale:

$$V = R \cdot a_{n\rceil i}$$

e si ricava da questa che

$$a_{n\rceil i} = \frac{V}{R}$$

Noto n si cerca sulle tavole finanziarie di $a_{n\rceil i}$ (o con ragionamento analogo di $\ddot{a}_{n\rceil i}$) fra quali valori è compreso il rapporto V/R e si trovano due valori del tasso fra i quali è compreso il tasso incognito. Si procede poi ad un'interpolazione.

ESEMPI

a) Paolo ha versato per 8 anni, alla fine di ogni anno, € 2.500. Il montante, all'atto dell'ultimo versamento, risulta di € 23.400. Quale tasso d'interesse gli è stato corrisposto?

Dati: $R = 2.500\ €$ $\quad M = 23.400\ €$ $\quad n = 8$ $\quad i = ?$

Dalla formula del montante:

$$s_{8\rceil i} = \frac{23.400}{2.500} = 9.36$$

Sulle tavole di $s_{n\rceil i}$ si trova:

n	4.25%	i	4.5%
8	9,29671023	9.36	9,38001362

ed interpolando:

$$i = \frac{9{,}36 - 9{,}29671023}{9{,}38001362 - 9{,}29671023}(4.5 - 4.25) + 4.25 = 4.44\%$$

b) Per la sua attività commerciale, Gianpaolo chiede un prestito di € 50.000 che ottiene di rimborsare con 16 rate anticipate di € 4.700. Determinare il tasso annuo del prestito.

Dati: $R = 4.700\ €$ $\quad V = 50.000\ €$ $\quad n = 16$ $\quad i = ?$

Dalla formula del valore attuale:

$$\ddot{a}_{8\rceil i} = \frac{50000}{4.700} = 10{,}63829787$$

Sulle tavole di $\ddot{a}_{n\rceil i}$ si trova:

n	6%	i	6.25%
16	10,71224899	10,63829787	10,55554936

ed interpolando:

$$i = \frac{10{,}63829787 - 10{,}71224899}{10{,}55554936 - 10{,}71224899}(6.25 - 6) + 6 = 6.12\%$$