CAPITOLO 4

RIMBORSO DI PRESTITI

1. GENERALITA' SUL RIMBORSO DEI PRESTITI

Si definisce *prestito* una concessione di credito fatta da un soggetto ad un altro. Chi concede il prestito si chiama creditore o mutuante. Chi riceve il prestito si chiama debitore o mutuatario. Il capitale che viene prestato si chiama mutuo. Si definisce **ammortamento**, l'operazione finanziaria con la quale il debitore restituisce al creditore la somma ricevuta in prestito e paga i relativi interessi.

Un prestito si dice ***indiviso*** se il creditore è una sola persona o un solo ente, si dice ***diviso*** quando il mutuo è suddiviso in un certo numero di quote, dette *titoli di credito*, ciascuna delle quali rappresenta un prestito indiviso. Un prestito può essere ***redimibile*** quando ne è previsto il rimborso unitamente gli interessi, o ***irredimibile*** quando è previsto il solo rimborso periodico e illimitato degli interessi.

Il rimborso di un prestito può avvenire secondo diverse modalità, le più comuni sono:

a) rimborso globale, in cui il debitore paga il montante in una sola volta ad una certa data;
b) rimborso globale con pagamento periodico degli interessi, in cui gli interessi vengono pagati periodicamente, mentre il capitale viene pagato interamente ad una certa scadenza;
c) rimborso graduale, dove sia gli interessi che il capitale sono pagati periodicamente e il debito viene in questo modo estinto gradualmente.

Nel rimborso graduale le rate di ammortamento che il debitore versa periodicamente sono costituite da due parti: un quota di interesse e una quota capitale.

Indichiamo con:

- D il debito iniziale che si deve estinguere;
- $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$ le rate corrispondenti alle diverse scadenze;
- $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots$ le quote capitali;
- $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots$ le quote interesse, cioè gli interessi relativi al periodo, calcolati sulla parte di debito ancora da rimborsare.

Nel periodo $k-esimo$ è valida la relazione $R_k = C_k + I_k$ che rappresenta la rata che il debitore paga in tale periodo.

Si definisce ***debito estinto*** alla fine del $k-esimo$ periodo e si indica con E_k, la somma delle k quote di capitale pagate: $E_k = C_1 + C_2 + \dots + C_k$.

Si definisce debito residuo alla fine del $k-esimo$ periodo e si indica con D_k, la differenza tra l'importo del prestito e quello del debito estinto, cioè le n-k quote di capitale ancora da pagare:

$$D_k = D - E_k.$$

La quota d'interesse di ciascun anno è l'interesse calcolato per un anno sul debito residuo dell'anno precedente, perché il pagamento delle rate è posticipato: $I_k = D_{k-1} \cdot i$.

2. VALORE DI UN PRESTITO

Nel caso del rimborso di un prestito spesso si presenta il problema di valutare il prestito ad una certa scadenza, per esempio quando il debitore chiede di saldare anticipatamente il debito oppure quando il prestito viene ceduto dal creditore a terzi. Il **valore del prestito** V_k è il valore attuale di tutte le rate che il debitore deve ancora da versare al creditore, calcolato utilizzando un **tasso di valutazione** $\boldsymbol{i'}$ generalmente diverso da i. A volte è richiesta una valutazione separata fra le quote capitale e le quote interessi, in tal caso si dice **usufrutto** U_k il valore attuale di tutte le quote interesse ancora da versare e **nuda proprietà** P_k il valore attuale di tutte le quote capitale ancora da versare; entrambe le valutazioni devono essere fatte utilizzando il tasso di valutazione i'. Il valore del prestito sarà la somma dell'usufrutto e della nuda proprietà, cioè: $V_k = U_k + P_k$.

3. RIMBORSO GLOBALE

Nel rimborso globale la cifra che il debitore paga alla scadenza rappresenta la capitalizzazione della quota avuta in prestito. Questo tipo di rimborso non è molto usato in quanto molto oneroso da parte del debitore, che deve restituire alla scadenza prefissata l'intera somma prestata aumentata degli interessi.

ESEMPIO

Calcoliamo quanto deve pagare una persona che ha ottenuto da una banca un prestito di 10.000€ al tasso del 6%, avente scadenza fra 3 anni.

Dati: $M = 10.000$ €; $i = 0{,}06$; $t = 3\ anni$

$$M = 10.000(1 + 0{,}06)^3 = 11.910{,}16\ €$$

Supponiamo ora di voler valutare il prestito dopo un tempo k dalla stipula del contratto: sarà necessario scontare il montante M per il tempo $n - k$, ossia

$$V_k = M(1 + i')^{-(n-k)} = D(1 + i)^n(1 + i')^{-(n-k)}$$

La nuda proprietà e l'usufrutto saranno dati da:

$$P_k = D(1+i')^{-(n-k)}$$

$$U_k = V_k - P_k$$

ESEMPIO

Un imprenditore chiede un prestito di € 25.000 da rimborsare globalmente dopo 6 anni al tasso del 6.75%. Dopo 4 anni gli viene concesso di riscattare anticipatamente il debito al tasso di valutazione del 4.75%. Determinare la somma che l'imprenditore avrebbe dovuto pagare alla scadenza, il valore di riscatto suddiviso in usufrutto e nuda proprietà.

Dati: $D = 25.000$ € $\quad n = 6 \quad i = 0.0675 \quad k = 4 \quad i' = 0.0475$

La somma che l'imprenditore avrebbe dovuto pagare alla scadenza è il montante di € 25.000 per 6 anni al tasso del 6.75%: $M = 25.000(1+0.0675)^6 = 36.995{,}36$ €

Riscatta tale prestito 2 anni prima della scadenza al tasso del 4.75%:

$$V_4 = 36.995{,}36(1+0.0475)^{-(6-4)} = 33.716{,}25\ €$$

La nuda proprietà è il valore del capitale 2 anni prima della scadenza:

$$P_4 = 25.000(1+0.0475)^{-(6-4)} = 22.784{,}10\ €$$

$$U_4 = 33.716{,}25 - 22.784{,}10 = 10.932{,}14\ €$$

4. RIMBORSO GLOBALE CON PAGAMENTO PERIODICO DEGLI INTERESSI

In tale tipo di rimborso il debitore si impegna a restituire la somma prestata D alla scadenza ed a versare alla fine di ogni anno l'interesse semplice sulla somma prestata $D \cdot i$. Nel caso in cui il pagamento degli interessi non sia annuale ma *k* volte l'anno, gli interessi versati saranno $\frac{D \cdot i}{k}$.

Per il debitore questo tipo di rimborso è ancora piuttosto oneroso, in quanto alla scadenza deve rimborsare l'intera somma prestatagli; per il creditore invece è un modo per investire il capitale D che gli frutta alla fine di ogni anno gli interessi. Per ovviare al problema del debitore e quindi per diluire nel tempo la costituzione del capitale da restituire alla scadenza, egli può pagare al creditore gli interessi annui e versare presso un istituto di credito annualmente una quota, detta rata di accantonamento, in modo tale che alla scadenza del debito egli si troverà costituito il capitale da rimborsare al creditore. Poiché il tasso che offre l'istituto di credito è generalmente diverso da quello pattuito col creditore si parla di ammortamento a due tassi, che verrà trattato in dettaglio nel paragrafo seguente.

Il calcolo della nuda proprietà è uguale al caso di rimborso globale, cioè:

$$P_k = D(1+i')^{-(n-k)}$$

L'usufrutto è il valore attuale, all'epoca k, di tutti gli interessi ancora da pagare. Tale quote interesse formano una rendita di $n-k$ rate di importo $D \cdot i$, di cui interessa il valore attuale al tasso di valutazione i', ossia:

$$U_k = Dia_{n-k]i'}$$

Il valore del prestito sarà: $V_k = U_k + P_k$.

ESEMPI

a) Un negoziante prende in prestito € 30.000 per ampliare la sua attività e deve restituire l'intera somma tra 8 anni e pagare annualmente gli interessi al tasso del 6.5%. Quali sono gli impegni del negoziante?

Dati: $D = 30.000$ € $\quad n = 8 \quad i = 0.065$

Il negoziante dovrà restituire:

- Ogni anno gli interessi pari a: $I = 30.000 \cdot 0.065 = 1.950$ €
- Alla scadenza, dopo 8 anni, la somma di € 30.000 insieme all'ultima quota interesse di € 1.950, per un totale di € 31.950.

b) Se il negoziante dell'esercizio precedente volesse riscattare il prestito dopo 5 anni, quale sarebbero il suo valore, la nuda proprietà e l'usufrutto, sapendo che il tasso di valutazione è del 5%?

Dati: $D = 30.000$ € $\quad n = 8 \quad i = 0.065 \quad k = 5 \quad i' = 0.05$

Calcoliamo nuda proprietà ed usufrutto e poi sommiamo:

$$P_5 = 30.000(1+0.05)^{-(8-5)} = 25.915{,}13 \text{ €}$$

$$U_5 = 1.950 \cdot a_{3]0.05} = 5.310{,}33$$

$$\Rightarrow \quad V_5 = 25.915{,}13 + 5.310{,}33 = 31.225{,}46 \text{ €}$$

5. AMMORTAMENTO A DUE TASSI O AMERICANO

Nell'ammortamento a due tassi il debitore e il creditore decidono il pagamento graduale degli interessi e il rimborso globale finale del capitale, ma il debitore può trovarsi in difficoltà a dover pagare alla scadenza del prestito una grossa somma in un'unica soluzione. Per ovviare a questo inconveniente il debitore decide di costituire il capitale che alla fine dovrà pagare, ad esempio effettuando dei versamenti periodici presso una banca. Poiché la costituzione di capitale è indipendente dal prestito si avrà che, in generale, il tasso di costituzione i' sarà diverso dal tasso di ammortamento i (quasi sempre $i' < i$).

Consideriamo solo il caso in cui le rate di costituzione del capitale siano costanti. Se indichiamo con D il valore del debito, ogni periodo il debitore dovrà versare due quote:

1) la quota d'interesse calcolata sull'intero prestito, data da $I = D \cdot i$, da versare al creditore;
2) la rata per la costituzione del capitale data da $R = \frac{D}{s_{n\rceil i'}}$, da versare all'istituto di credito.

La rata complessiva che il debitore dovrà pagare sarà:

$$\boxed{R' = D \cdot i + \frac{D}{s_{n\rceil i'}}}$$

In questo modo il rimborso per il creditore è un rimborso globale con riscossione periodica degli interessi, per il debitore è un rimborso graduale.

ESEMPIO

Tizio prende in prestito la somma di 7.000 € per 5 anni, con pagamento annuo posticipato degli interessi al tasso del 5%. Egli provvede alla costituzione della somma da rimborsare versando in banca rate costanti posticipate al tasso del 4%. A quanto ammonta la rata complessiva annua.

Dati: $D = 7.000$ €; $i = 0{,}05$; $n = 5\ anni$ $i' = 0{,}04$

$$R = \frac{7.000}{s_{5\rceil 0,04}} = 1.292{,}39\ €$$

$$I = 7.000 \cdot 0{,}05 = 350\ €$$

$$R' = 1.292{,}39 + 350 = 1.642{,}39\ €$$

Per stendere il piano di ammortamento è necessario creare una tabella con $n + 1$ righe (si parte dall'anno 0, fino all'anno n) e 6 colonne che conterranno rispettivamente:

- gli anni,
- la quota capitale R,
- la quota interesse I,
- la rata R',
- il debito estinto $E_k = E_{k-1} \cdot (1 + i') + R$,
- il debito residuo $D_k = D - E_k$.

ESEMPIO

Stendere il piano di ammortamento dell'esempio precedente.

ANNO	QUOTA CAPITALE	QUOTA INTERESSE	RATA	DEBITO ESTINTO	DEBITO RESIDUO
0	-	-	-	0,00	7000
1	1292,39	350,00	1642,39	1292,39	5707,61
2	1292,39	350,00	1642,39	2636,48	4363,52
3	1292,39	350,00	1642,39	4034,32	2965,68
4	1292,39	350,00	1642,39	5488,09	1511,91
5	1292,39	350,00	1642,39	7000,00	0,00

6. AMMORTAMENTO UNIFORME O A QUOTE COSTANTI DI CAPITALE (ITALIANO)

Questo tipo di ammortamento prevede che il debitore paghi alla fine di ogni periodo e per tutta la durata del prestito rate variabili costituite da una quota costante di capitale C per estinguere il debito e da una quota di interesse semplice I, decrescente al variare del tempo.

La quota costante di capitale si ottiene dividendo la somma D avuta in prestito per il numero n delle rate di ammortamento, cioè:

$$C = \frac{D}{n}$$

La quota interesse è calcolata come l'interesse semplice del debito residuo dell'anno precedente, cioè:

$$I_k = i \cdot D_{k-1}$$

Per stendere il piano di ammortamento è necessario creare una tabella con $n+1$ righe (si parte dall'anno 0, fino all'anno n) e 6 colonne che conterranno rispettivamente:

- gli anni,
- la quota capitale C,
- la quota interesse I_k,
- la rata R_k,
- il debito estinto $E_k = k \cdot C = k \cdot \frac{D}{n}$,
- il debito residuo $D_k = D - E_k = D - k\frac{D}{n} = D\left(1 - \frac{k}{n}\right) = \frac{n-k}{n}D$.

Da quest'ultima formula si può ricavare un'altra formula per calcolare la quota interesse, infatti:

$$I_k = i \cdot D_{k-1} = i \cdot \frac{n-k+1}{n} D = (n-k+1)Ci$$

Il metodo di ammortamento uniforme ha però un difetto che ne impedisce un largo utilizzo: le rate non sono costanti ed inoltre sono maggiori nei primi anni, periodo in cui il debitore ha minori possibilità finanziarie, averno appena chiesto un prestito.

ESEMPIO

Si prende in prestito la somma di 1.000 € per 5 anni, con pagamento annuo posticipato degli interessi al tasso del 5% e si concorda di restituirla con metodo uniforme. Calcolare la situazione al quarto anno e redigere il piano di ammortamento.

Dati: $D = 1.000\ €;$ $i = 0,05;$ $n = 5\ anni;$ $k = 4$

Per calcolare la situazione al quarto anno non è necessario redigere tutto il piano di ammortamento fino ad arrivare all'anno 4, infatti:

$$C = \frac{1000}{5} = 200\ €$$

$$I_4 = (5 - 4 + 1) \cdot 200 \cdot 0.05 = 20\ €$$

$$R_4 = C + I_4 = 200 + 20 = 220\ €$$

$$E_4 = k \cdot C = 4 \cdot 200 = 800\ €$$

$$D_4 = D - E_4 = 1000 - 800 = 200\ €$$

Per costruire il piano di ammortamento completo invece:

- $C = \frac{1.000}{5} = 200\ €$

  $I_1 = D \cdot i$=1.000·0,05 = 50€

  $R_1 = C + I_1 = 250\ €$

  $E_1 = C = 200\ €$

  $D_1 = D - C = 800\ €$
- $C = 200\ €$

  $I_2 = D_1 \cdot i$=8 00·0,05 = 40 €

  $R_2 = C + I_2 = 240\ €$

  $E_2 = 2C = 400\ €$

  $D_2 = D - E_2 = 600\ €$
- $C = 200\ €$

  $I_3 = D_2 \cdot i$=6 00·0,05 = 30 €

  $R_3 = C + I_3 = 230\ €$

  $E_3 = 3C = 600\ €$

  $D_3 = D - E_3 = 400\ €$

- ....

ANNO	QUOTA CAPITALE	QUOTA INTERESSE	RATA	DEBITO ESTINTO	DEBITO RESIDUO
0	-	-	-	0,00	1000,00
1	200,00	50,00	250,00	200,00	800,00
2	200,00	40,00	240,00	400,00	600,00
3	200,00	30,00	230,00	600,00	400,00
4	200,00	20,00	220,00	800,00	200,00
5	200,00	10,00	210,00	1000,00	0,00

Per calcolare il valore del prestito al periodo k ed al tasso di valutazione i', si scompone il problema nel calcolare usufrutto e nuda proprietà. Quest'ultima, essendo data da tutte le quote costanti di capitale non ancora corrisposte, è il valore attuale di una rendita posticipata di $n-k$ rate costanti di valore C calcolata al tasso i', cioè:

$$P_k = C \cdot a_{n-k]i'} = \frac{D}{n} \cdot a_{n-k]i'}$$

L'usufrutto, invece, è dato dalla formula:

$$U_k = \frac{i}{i'}(D_k - P_k) = \frac{Di}{ni'}\left(n - k - a_{n-k]i'}\right)$$

Il valore del prestito sarà la loro somma: $V_k = U_k + P_k$

ESEMPIO

Si calcoli il valore del prestito dell'esempio precedente dopo 4 anni dalla stipulazione del contratto ed al tasso di valutazione del 4.25%.

$$P_4 = \frac{1000}{5} \cdot a_{5-4]0.0425} = 191{,}85\ €$$

$$U_4 = \frac{1000 \cdot 0.05}{5 \cdot 0.0425}\left(5 - 4 - a_{5-4]0.0425}\right) = 9{,}59\ €$$

$$V_4 = 191{,}85 + 9{,}59 = 201{,}44\ €$$

7. AMMORTAMENTO PROGRESSIVO O A RATE COSTANTI (FRANCESE)

Nell'ammortamento progressivo o francese è costante il valore della rata. E' il tipo di rimborso più utilizzato: il debitore deve pagare alla fine di ogni periodo e per tutta la durata del prestito, una rata di importo costante, comprensiva di una quota capitale e di una quota di interessi. La rata complessiva del prestito è quella di una rendita temporanea il cui valore attuale è uguale al valore *D* del prestito.

Quindi per il calcolo della rata utilizzeremo la formula del valore attuale di una rendita posticipata:

$$R = \frac{D}{a_{n\rceil i}}$$

Le rate sono costituite da quote interessi decrescenti e da quote capitali crescenti.

- Le quote capitali risultano crescenti in progressione geometrica di ragione $(1 + i)$ e si ottengono utilizzando la formula: $C_k = C_1(1+i)^{k-1}$, dove $C_1 = R - I_1 = D \cdot \sigma_{n\rceil i}$
- La quota di interesse è data da: $I_k = R - C_k = R - R(1+i)^{k-n-1} = R[1-(1+i)^{k-n-1}]$

Per stendere il piano di ammortamento è necessario creare una tabella con $n+1$ righe (si parte dall'anno 0, fino all'anno n) e 6 colonne che conterranno rispettivamente:

- gli anni,
- la rata R,
- la quota interesse I_k,
- la quota capitale C_k,
- il debito estinto $E_k = C_1 s_{k\rceil i}$,
- il debito residuo (che è la somma dei valori attuali delle rate che restano da pagare), è dato da:

$$D_k = R a_{n-k\rceil i}.$$

ESEMPIO

Si prende in prestito la somma di 3.000 € per 4 anni, con pagamento annuo posticipato degli interessi al tasso del 4,5%. Redigere il piano di ammortamento.

Dati: $D = 3.000$ €; $i = 0{,}045$; $t = 4\ anni$

$$R = \frac{3000}{a_{4\rceil 0.045}} = 836{,}23\ €$$

$$I_1 = 3.000 \cdot 0.045 = 135\ € \qquad C_1 = 836{,}23 - 135 = 701{,}23\ €$$

$$E_1 = E_0 + C_1 = 701{,}23\ € \qquad D_1 = D - E_1 = 3.000 - 701{,}23 = 2.298{,}77\ €$$

E così via.

ANNO	RATA	QUOTA INTERESSE	QUOTA CAPITALE	DEBITO ESTINTO	DEBITO RESIDUO
0	-	-	-	0,00	3000,00
1	836,23	135,00	701,23	701,23	2298,77
2	836,23	103,44	732,79	1434,02	1565,98
3	836,23	70,47	765,76	2199,78	800,22
4	836,23	36,01	800,22	3000,00	0,00

In questo tipo di ammortamento, a volte, è necessario calcolare il numero di rate che occorrono per estinguere il debito, sapendo che il debitore è disposto a corrispondere una rata prestabilita. E' chiaro che il numero di rate deve essere un numero intero, ma risolvendo l'equazione $D = R \cdot a_{n|i}$ difficilmente si otterrà una soluzione intera, generalmente si avrà $n' < n < n' + 1$, dove n' ed il suo successivo si deducono dalle tavole di $a_{n|i}$. Non solo, ma dall'equazione precedente si può osservare che:

$$D = R\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \quad \Rightarrow \quad Di(1+i)^n = R(1+i)^n - R \quad \Rightarrow \quad (1+i)^n = \frac{R}{R - Di}$$

che è possibile solo nel caso in cui $R - Di > 0 \quad \Rightarrow \quad R > Di$

Stabilito che il problema ammette soluzione, è necessario procedere a qualche **metodo di accomodamento** della rata (così come già visto nel caso di ricerca del numero di rate di costituzione di un capitale):

- $n = n' \quad \Rightarrow$ si ricalcola il valore della rata, che sarà maggiore di R;
- $n = n' + 1 \quad \Rightarrow$ si ricalcola il valore della rata, che sarà minore di R;
- $n = n'$ rate di importo R + una rata complementare da versare con l'ultima rata, un periodo dopo l'ultimo versamento o alla stipulazione del contratto (in tal caso si modificherà l'importo del prestito).

ESEMPI

a) Alessandro prende in prestito € 30.000 convenendo il rimborso con rate costanti di circa € 4.000 al tasso del 7% annuo. Determinare il numero di rate che occorrono ad estinguere il debito ed indicare i possibili accomodamenti.

Dati: $D = 30.000$ € $\quad R = 4.500$ € $\quad i = 0.07$

Dall'equazione $D = R \cdot a_{n|i}$ si ricava: $a_{n|0.07} = \frac{30.000}{4.500} = 6.\overline{6}$

Si cerca sulle tavole finanziarie di $a_{n|i}$ la colonna del tasso 7%, la si scorre finché si trova il numero $6.\overline{6}$. Poiché tale numero non esiste si prendono i valori immediatamente inferiore e superiore, corrispondenti alle righe di $n = 9$ e $n = 10$. Si scopre così che

$$9 < n < 10$$

Possibili accomodamenti al problema:

- Si pagano 9 rate di importo $R = \frac{30.000}{a_{9|0.07}} = 4.604,59$ €
- Si pagano 10 rate di importo $R = \frac{30.000}{a_{10|0.07}} = 4.271,33$ €
- Non volendo modificare l'importo delle rate, si calcola il valore attuale delle 9 rate da € 4.500:

$$V = 4.500 \cdot a_{9]0.07} = 29.318{,}55 \text{ €}$$

Per saldare il debito mancano ancora $30.000 - 29.318{,}55 = 681{,}45$ € e si può procedere in uno dei seguenti modi:

- Si versa la differenza di € 681,45 alla stipulazione del contratto (ed in tal caso si modifica l'importo del prestito) e poi 9 rate da € 4.500.
- Si versano 9 rate da € 4.500 ed una rata complementare R_c all'atto dell'ultimo versamento. In tal caso:

$$R_c = 681{,}45(1 + 0.07)^9 = 1.252{,}82 \text{ €}$$

- Si versano 9 rate da € 4.500 ed una rata complementare R_c un anno dopo l'ultimo versamento. In tal caso:

$$R_c = 681{,}45(1 + 0.07)^{10} = 1.340{,}52 \text{ €}$$

b) Rebecca ottiene un prestito di € 12.000 da estinguersi al tasso del 6.5% con rate costanti di importo non superiore a € 1.500. Determinare il numero di rate che occorrono ad estinguere il debito ed indicare i possibili accomodamenti.

Dati: $D = 12.000$ € $\quad R = 1.500$ € $\quad i = 0.065$

Dall'equazione $D = R \cdot a_{n]i}$ si ricava: $a_{n]0.065} = \frac{12.000}{1.500} = 8$

Si cerca sulle tavole finanziarie di $a_{n]i}$ la colonna del tasso 6.5%, la si scorre finché si trova il numero 8. Poiché tale numero non esiste si prendono i valori immediatamente inferiore e superiore, corrispondenti alle righe di $n = 11$ e $n = 12$. Si scopre così che

$$11 < n < 12$$

Possibili accomodamenti al problema:

- Non è possibile pagare 11 rate poiché il loro importo risulterebbe maggiore di € 1.500.
- Si pagano 12 rate di importo $R = \frac{12.000}{a_{12]0.065}} = 1.470{,}82$ €
- Non volendo modificare l'importo delle rate, si calcola il valore attuale delle 11 rate da € 1.500:

$$V = 1.500 \cdot a_{11]0.065} = 11.533{,}56 \text{ €}$$

Per saldare il debito mancano ancora $12.000 - 11.533{,}56 = 466{,}44$ € e si può procedere in uno dei seguenti modi:

  - Si versa la differenza di € 466,44 alla stipulazione del contratto (ed in tal caso si modifica l'importo del prestito) e poi 11 rate da € 1.500.
  - Non si può versare la rata complementare all'atto dell'ultimo versamento poiché in tal

caso l'importo totale supererebbe i 1.500 €.

- Si versano 11 rate da € 1.500 ed una rata complementare R_c un anno dopo l'ultimo versamento. In tal caso:

$$R_c = 466{,}44(1 + 0.065)^{12} = 993{,}10\ €$$

Il valore di un prestito all'anno k nell'ammortamento francese è dato dal valore attuale delle $n-k$ rate ancora da pagare calcolato al tasso di valutazione i', cioè:

$$V_k = R \cdot a_{n-k\rceil i'} = D \cdot \frac{a_{n-k\rceil i'}}{a_{n\rceil i}}$$

La formula della nuda proprietà, tralasciandone la dimostrazione, è

$$P_k = R\frac{(1+i')^{-(n-k)} - (1+i)^{-(n-k)}}{i - i'}$$

tale formula non è applicabile nel caso in cui $i' = i$, in quanto si annullerebbe il denominatore. In tal caso, poiché il valore del debito coincide col debito residuo, si calcolerà come somma dei valori attuali di tutte le quote capitali ancora da pagare:

$$P_k = (n-k)C_k = (n-k)R(1+i)^{-(n-k+1)}$$

L'usufrutto è invece dato dalla differenza:

$$U_k = V_k - P_k$$

ESEMPI

a) Un prestito di € 15.000 viene rimborsato con metodo progressivo in 8 anni al tasso del 5.75%. Determinare il valore del prestito, la nuda proprietà e l'usufrutto dopo 5 anni al tasso di valutazione del 4.5%.

Dati: $D = 15.000\ €$ $\quad n = 8$ $\quad i = 0.0575$ $\quad k = 5$ $\quad i' = 0.045$

Innanzitutto si calcola la rata costante:

$$R = \frac{15.000}{a_{8\rceil 0.0575}} = 2.391{,}69\ €$$

Il valore del prestito è:

$$V_5 = 2.391{,}69 \cdot a_{3\rceil 0.045} = 6.574{,}68\ €$$

La nuda proprietà:

$$P_5 = 2.391{,}69\frac{(1+0.045)^{-(8-5)} - (1+0.0575)^{-(8-5)}}{0.0575 - 0.045} = 5.875{,}62\ €$$

L'usufrutto:

$$U_5 = 6.574{,}68 - 5.875{,}62 = 699{,}06\ €$$

b) Un prestito di € 22.000 viene rimborsato con metodo francese in 10 anni al tasso del 6%. Determinare il tasso di valutazione nel caso in cui il prestito venga ceduto dopo 6 anni per € 10.000.

Dati: $D = 22.000\ €$ $\quad n = 10$ $\quad i = 0.06$ $\quad k = 6$ $\quad i' = ?$ $\quad V_6 = 10.000\ €$

Prima di tutto si calcola la rata:

$$R = \frac{22.000}{a_{10]0.06}} = 2.989{,}10\ €$$

Dall'equazione $V_6 = R \cdot a_{4]i'}$ si ottiene

$$a_{4]i'} = \frac{10.000}{2.989{,}10} = 3.34549411$$

Ora sulle tavole finanziarie si trova:

n	7.50%	i'	7.75%
4	3.34932627	3.34549411	3.33064189

E con l'interpolazione si ottiene il tasso di valutazione i':

$$i' = \frac{3.34549411 - 3.34932627}{3.33064189 - 3.34932627}(7.75 - 7.5) + 7.5 = 7.55\%$$

8. IL LEASING FINANZIARIO

Il leasing o locazione finanziaria è un contratto con cui un'impresa ottiene da un'altra impresa un bene, in modo da poterlo utilizzare per un certo periodo; è nato negli Stati Uniti intorno agli anni cinquanta e si è diffuso in Italia a partire dagli anni ottanta.

- Azienda locataria o conduttrice: è l'azienda che ottiene in prestito il bene.
- Azienda locatrice o società di leasing : azienda che acquista i beni per concederli in prestito.
- Azienda produttrice o fornitrice: è l'azienda che produce i beni che acquista l'azienda locatrice.

Esempi di beni che vengono ceduti in leasing sono: fabbricati, mezzi di trasporto macchine per la produzione industriale ecc…

Al termine del prestito il locatario può: rinnovare il contratto per un altro periodo; restituire il bene al locatore; riscattare il bene, di cui diviene proprietario, mediante il pagamento di una quota stabilita fin dal momento della stipulazione del contratto.

Il contratto di leasing consiste in:

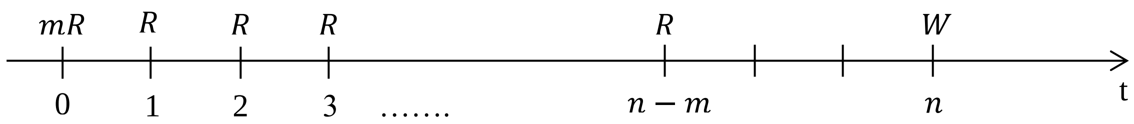
- un versamento periodico per un determinato numero i periodi. Il canone può essere costante o variabile regressivo, cioè decrescente nel tempo. Il canone può essere anticipato o posticipato.
- L'eventuale pagamento anticipato, alla stipulazione del contratto, di un certo numero di canoni.
- Il prezzo del riscatto al termine del pagamento dei canoni.

Per il principio dell'equivalenza finanziaria, il valore del bene è il valore attuale di tutte le somme che la società locataria si impegna a versare alla società di leasing.

Detti:

- C il valore del bene;
- R l'importo dei canoni;
- n il numero totale dei canoni;
- m il numero dei canoni da versare alla stipulazione del contratto;
- i_k il tasso dell'operazione;
- W il valore di riscatto

E, considerato il seguente schema sull'asse dei tempi:



per il principio dell'equivalenza finanziaria:

$$C = mR + R \cdot a_{n-m\rceil i_k} + W \cdot (1+i_k)^{-n}$$

ESEMPI

a) Calcolare il canone mensile posticipato di un'automobile del costo di 10.000 € per 3 anni al tasso del 1,17% mensile.

Dati: $C = 10.000\ €;$ $\quad i = 0{,}0117;$ $\quad n = 3\ anni$

$$R = 10.000\frac{1}{a_{3\rceil 0{,}0117}} = 342{,}09\ €$$

b) Determinare il canone mensile anticipato di leasing di un'automobile del costo di 10.000 € per 3 anni al tasso mensile del 0,0125.

$$R = 10.000\frac{1}{\ddot{a}_{3\rceil 0{,}0125}} = 342{,}37\ €$$

c) Un'azienda stipula un contratto di leasing per alcune autovetture del costo di € 75.000. Il contratto prevede:

- pagamento di 48 canoni mensili posticipati di cui 6 alla stipulazione del contratto;
- valore di riscatto: 10% del costo del bene;
- tasso annuo di leasing: 6.5%

Determinare l'importo del canoni.

Dati: $C = 75.000\ €$ $\quad n = 48$ $\quad m = 6$ $\quad W = 0.1C$ $\quad i = 0.065$

Prima di tutto, essendo i canoni mensili, è necessario trovare il tasso mensile:

$$i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0.065} - 1 = 0.0159$$

Si imposta ora l'equazione:

$$75.000 = 6R + R \cdot a_{42\rceil 0.0159} + 0.1 \cdot 75.000 \cdot (1 + 0.0159)^{-48}$$

Da cui:

$$R = \frac{75.000 - 0.1 \cdot 75.000 \cdot (1 + 0.0159)^{-48}}{6 + a_{42\rceil 0.0159}} = 1.958{,}95\ €$$

9. CENNI SUL RIMBORSO DI PRESTITI DIVISI

Quando un ente necessita di una somma molto elevata, difficilmente troverà un unico creditore disposto a concedergliela; quindi divide tale somma in tanti piccoli prestiti di uguale importo che vengono offerti al pubblico tramite gli istituti di credito. L'ente rilascia a garanzia del prestito un titolo di credito detto **obbligazione** e perciò il prestito viene detto **prestito obbligazionario**. In questo modo l'ente emittente ottiene il suo prestito, ma d'altra parte i sottoscrittori possono investire i loro risparmi ad un tasso generalmente maggiore di quello sul conto corrente; inoltre in caso di bisogno possono cedere tali obbligazioni sul mercato borsistico e realizzare un guadagno prima della loro scadenza. I titoli più conosciuti sono:

- BOT: Buoni Ordinari del Tesoro;
- BTP: Buoni del Tesoro Poliennali;
- CCT: Certificati di Credito del Tesoro;
- CTZ: Certificati del Tesoro Zero-Coupon bond.

Nel momento in cui viene emesso sul mercato un prestito obbligazionario vengono stabilite le condizioni del prestito:

- l'importo complessivo del prestito;
- il numero di obbligazioni emesse N;

- il **valore nominale C di ogni obbligazione**, cioè l'importo del prestito di ogni obbligazione ed è su tale valore che viene calcolato l'interesse (quindi l'importo del prestito è NC);
- il **tasso nominale**, cioè il tasso del prestito, che serve per calcolare gli interessi sul valore nominale da rapportare poi al periodo (anno, semestre, ecc.);
- la durata del prestito;
- le modalità di rimborso con le eventuali clausole nel caso di rimborso anticipato.

Il valore C è l'importo che il sottoscrittore dovrebbe pagare all'atto dell'emissione e quello che dovrebbe ricevere alla scadenza interessi esclusi. A volte, però, l'ente emittente, per facilitare il piazzamento delle obbligazioni, fa pagare un prezzo inferiore al valore nominale dell'obbligazione, detto **prezzo di emissione C'** o **valore di emissione**. Se il prezzo di emissione è inferiore al valore nominale dell'obbligazione, si dice che l'emissione è sotto la pari; se è uguale, l'emissione è alla pari, se è superiore, l'emissione è sopra la pari.

Anche il **prezzo di rimborso** può essere fissato ed essere diverso dal valore nominale. Se il prezzo di rimborso è inferiore al valore nominale dell'obbligazione, si dice che il rimborso è sotto la pari; se è uguale, il rimborso è alla pari, se è superiore, il rimborso è sopra la pari.

Per incentivare il risparmiatore ad investire in obbligazioni, l'ente può fissare un prezzo di emissione sotto la pari ed un prezzo di rimborso sopra la pari.

Le più importanti forme di rimborso sono:

1) Rimborso globale di tutti i titoli.

Tutte le obbligazioni sono rimborsate ad una scadenza prestabilita comprensive di interessi. Un esempio sono i BOT a breve scadenza (generalmente sotto l'anno). Nel caso dei BOT non viene esplicitato un tasso di interesse, gli interessi **semplici** sono dati dalla differenza tra il prezzo di rimborso ed il prezzo di emissione, che viene determinato non dall'ente, bensì da un asta indetta dal Ministero del Tesoro. Nel caso invece dei CTZ, la scadenza è generalmente di 18 o 24 mesi e quindi si parla di interesse composto; inoltre sono soggetti a ritenuta fiscale del 12.50% sugli interessi maturati, cioè sulla differenza fra 100 ed il valore nominale di acquisto. Tutte le altre caratteristiche sono quelle dei BOT.
In tal caso ed in tutti i casi in cui la scadenza è superiore all'anno, si ha il pagamento periodico degli interessi.

Per i prestiti indicizzati, come ad esempio i CCT, in cui la cedola è variabile, il calcolo del tasso effettivo di rendimento è molto complesso; mentre per i prestiti a cedola fissa, come i BTP, tale calcolo è una conseguenza dell'applicazione del principio di equivalenza finanziaria fra il valore di emissione e la somma dei valori attuali di tutte le quote interesse e del capitale rimborsato. Infatti: se C è il valore nominale, gli interessi in ogni periodo saranno Ci, da cui:

$$C' = Ci \cdot a_{n\rceil x} + C(1+x)^{-n}$$

dove x è il tasso incognito di investimento relativo al periodo considerato.

ESEMPI

a) Matteo ha acquistato dei BOT con scadenza a sei mesi al prezzo di 96,42 per 100 di valore nominale. Calcolare il tasso annuo di interesse.

Poiché la scadenza è inferiore all'anno si ragiona nel regime dell'interesse semplice, quindi:

$$C = C'(1+it) \quad \Rightarrow \quad 100 = 96{,}42\left(1 + i\frac{180}{360}\right)$$

Da cui:

$$i = \frac{100 - 96{,}42}{96{,}42 \cdot \frac{180}{360}} = 0.0743 = 7.43\%$$

b) Eleonora ha acquistato dei CTZ con scadenza a 18 mesi al prezzo di 94,05 per 100 di valore nominale. Calcolare il tasso annuo di interesse.

Poiché la scadenza è superiore all'anno si ragiona nel regime dell'interesse composto, quindi:

$$C = C'^{(1+i)^t} \quad \Rightarrow \quad 100 = 94{,}05(1+i)^{1.5}$$

Da cui:

$$i = \left(\frac{100}{94{,}05}\right)^{\frac{1}{1.5}} - 1 = 0.0417 = 4.17\%$$

Ma questo è il rendimento lordo, infatti è stato detto che i CTZ sono soggetti a ritenuta fiscale del 12.5% sugli interessi. Quindi:

gli interessi sono: $100 - 94{,}05 = 5{,}95$

la ritenuta sugli interessi è: $0.125 \cdot 5.95 = 0.744$

quindi alla scadenza verranno rimborsati: $100 - 0.7438 = 99{,}256$.

Il tasso di rendimento netto sarà dato dall'equazione:

$$99{,}256 = 94{,}05(1+i)^{1.5} \quad \Rightarrow \quad i = \left(\frac{99{,}256}{94{,}05}\right)^{\frac{1}{1.5}} - 1 = 0.0366 = 3.66\%$$

c) Marco ha acquistato dei BTP quadriennali a 95.30 per 100 di valore nominale, al tasso nominale del 5% annuo e cedola semestrale. Determinare il tasso annuo di rendimento.

Ogni semestre si incassa un interesse di $\frac{5}{2} = 2{,}5$ su 100 di valore nominale.

Il tasso di rendimento semestrale x, per il principio di equivalenza finanziaria, è dato dall'equazione:

$$C' = Ci \cdot a_{n]x} + C(1+x)^{-n} \qquad \Rightarrow \qquad 95{,}30 = 2{,}5 \cdot a_{8]x} + 100(1+x)^{-8}$$

Tale equazione si risolve per tentativi e poi per interpolazione:

se $x = 0.03$ il secondo membro dell'equazione diventa $96{,}49015391$

se $x = 0.0325$ il secondo membro dell'equazione diventa $94{,}79031481$

Interpolando:

$$x = \frac{95{,}30 - 96{,}49015391}{94{,}79031481 - 96{,}49015391}(3.25 - 3) + 3 = 3.18\%$$

Quello trovato è il tasso di rendimento semestrale; il tasso annuo è

$$i = (1 + 0.0318)^2 - 1 = 0.0646 = 6.46\%$$