CAPITOLO 1

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON MODULO

1. EQUAZIONI CON MODULO

Valore assoluto o modulo di un numero reale

Dato un numero reale x si chiama valore assoluto o modulo di x e si indica con il simbolo $|x|$, il numero reale così definito:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

ESEMPI:

a) $|+3| = 3$ poiché $+3 > 0$

b) $|-4| = -(-4) = 4$ poiché $-4 < 0$

c) $\left|\sqrt{3} - \sqrt{5}\right| = -\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right) = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ poiché $\sqrt{3} - \sqrt{5} < 0$

ATTENZIONE:

Il valore assoluto di un numero reale è sempre non negativo ed è nullo se e solo se il numero è zero; cioè:

$$|x| \geq 0 \quad \forall\, x \in \Re$$
$$|x| = 0 \quad \text{se e solo se } x = 0$$

Valore assoluto o modulo di un'espressione algebrica

La definizione di valore assoluto di un'espressione algebrica $A(x)$ è la naturale estensione della definizione di valore assoluto data per un numero reale:

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & se \ A(x) \geq 0 \\ -A(x) & se \ A(x) < 0 \end{cases}$$

In un'espressione $|A(x)|$, $A(x)$ si chiama *argomento* del valore assoluto.

ESEMPI:

a) In base alla definizione di modulo si ha:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & se \;\; x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & se \;\; x+1 < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |x+1| = \begin{cases} x+1 & se \;\; x \geq -1 \\ -x-1 & se \;\; x < -1 \end{cases}$$

b) In base alla definizione di modulo si ha:

$$|x^2-2x| = \begin{cases} x^2-2x & se \;\; x^2-2x \geq 0 \\ -(x^2-2x) & se \;\; x^2-2x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |x^2-2x| = \begin{cases} x^2-2x & se \;\; x \leq 0 \;\; \cup \;\; x \geq 2 \\ -x^2+2x & se \;\; 0 < x < 2 \end{cases}$$

Equazioni con valore assoluto

Vediamo ora come si risolvono equazioni in cui l'incognita compare all'interno di qualche modulo.

Per esempio:

$$|x+4| = 2 \qquad\qquad |x^2+2x| = x+2 \qquad\qquad |x| + |x-5| = 7$$

Illustriamo, di seguito, le tecniche risolutive delle equazioni con modulo.

1) Equazioni del tipo $|A(x)| = k$

Sono le più semplici equazioni con modulo che si possono presentare e si risolvono in base al seguente schema:

Se $k<0$	$\lvert A(x)\rvert = k$	$\Rightarrow$ impossibile
Se $k=0$	$\lvert A(x)\rvert = 0$	$\Rightarrow$ $A(x)=0$
Se $k>0$	$\lvert A(x)\rvert = k$	$\Rightarrow$ $A(x)=k \;\cup\; A(x)=-k$

ESEMPI:

a) $|x+1| = -2$

Questa equazione è **impossibile** in quanto il modulo di un numero è sempre non negativo e quindi non può mai essere uguale a -2.

b) $|x+2| = 0$

Questa equazione equivale a $x+2=0 \;\Rightarrow\; x=-2$, in quanto il valore assoluto di un numero è 0 se e solo se il numero stesso è 0.

c) $|x-3|=5$

Essendo $5>0$ l'equazione equivale a:

$$x-3=-5 \quad \cup \quad x-3=5$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$x=3-5 \quad \cup \quad x=3+5$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$x=-2 \quad \cup \quad x=8$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è $S=\{-2;8\}$

2) Equazioni del tipo $|A(x)|=B(x)$

Risolvere l'equazione $|A(x)|=B(x)$ equivale a risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} A(x)\geq 0 \\ A(x)=B(x) \end{cases} \cup \begin{cases} A(x)<0 \\ -A(x)=B(x) \end{cases}$$

Ossia l'insieme delle soluzioni dell'equazione $|A(x)|=B(x)$ è l'unione delle soluzioni dei due sistemi misti.

ESEMPIO:

Risolviamo l'equazione: $|x+1|=2x$.

L'equazione $|x+1|=2x$ equivale a:

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+1=2x \end{cases} \cup \begin{cases} x+1<0 \\ -x-1=2x \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} x\geq -1 \\ x=1 \end{cases} \cup \begin{cases} x<-1 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Il primo sistema ammette soluzione $x=1$ (perché la soluzione dell'equazione, $x=1$, soddisfa la condizione $x\geq -1$).

Il secondo sistema ***non** ammette soluzione* (perché la soluzione dell'equazione, $x=-\frac{1}{3}$, non soddisfa la condizione $x < -1$).

Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è $S = \{1\}$

3) Equazioni del tipo $|A(x)| = |B(x)|$ (equazioni con più moduli)

Per risolvere un'equazione in cui l'incognita compare all'interno di due o più moduli si procede come segue:

1° PASSO: si studia il segno degli argomenti dei moduli che compaiono nell'equazione;

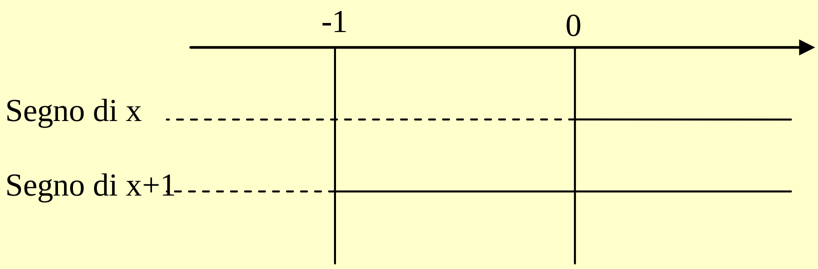
2° PASSO: si risolve l'equazione in ciascuno degli intervalli che si vengono a determinare;

3° PASSO: si conclude, assumendo come soluzioni dell'equazione originaria tutte le soluzioni accettabili che si sono trovate risolvendo le varie equazioni del passo 2.

ESEMPIO:

Risolviamo l'equazione: $2|x+1| + 2|x| = 2x + 3$

1° PASSO: per risolvere l'equazione, conviene prima studiare il segno degli argomenti dei due moduli, cioè il segno di $x+1$ e di x; riportiamo i risultati nello schema qui sotto:



Questo schema ci aiuta a riscrivere le espressioni $x+1$ e x, in base alla definizione di modulo, in ciascuno dei tre intervalli: $x < -1$; $-1 \le x < 0$; $x \ge 0$

Possiamo riassumere i risultati che si ottengono nella seguente tabella:

	$x < -1$	$-1 \le x < 0$	$x \ge 0$
$\lvert x \rvert$	-x	-x	x
$\lvert x+1 \rvert$	-x-1	x+1	x+1

2° PASSO: la tabella appena costruita consente di risolvere l'equazione data, in ciascuno dei tre intervalli $x<-1$; $-1\le x<0$; $x\ge 0$ in modo che non compaiano moduli.

$$\begin{cases} x<-1 \\ 2(-x-1)+2(-x)=2x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} -1\le x<0 \\ 2(x+1)+2(-x)=2x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} x\ge 0 \\ 2(x+1)+2x=2x+3 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} x<-1 \\ x=-\dfrac{5}{6} \end{cases} \cup \begin{cases} -1\le x<0 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x\ge 0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione non accettabile Soluzione accettabile Soluzione accettabile

3° PASSO: le soluzioni dell'equazione data sono le soluzioni accettabili ottenute nel passo precedente:

$$S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$$

2. DISEQUAZIONI CON MODULO

Esaminiamo alcune disequazioni in cui l'incognita compare all'interno di qualche valore assoluto. Per esempio:

$$|x|+2>3 \qquad |x|-|x-1|\ge 5 \qquad |x^2-6x|<3x$$

1) Disequazioni del tipo $|A(x)|<k$, $|A(x)|>k$, $|A(x)|\le k$, $|A(x)|\ge k$

Distinguiamo i seguenti casi a seconda del valore numerico che assume k.

Sia $k>0$

$$|A(x)|<k \quad \Rightarrow \quad -k<A(x)<k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A(x)>-k \\ A(x)<k \end{cases}$$

$$|A(x)|\le k \quad \Rightarrow \quad -k\le A(x)\le k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A(x)\ge -k \\ A(x)\le k \end{cases}$$

$$|A(x)|>k \quad \Rightarrow \quad A(x)<-k \;\cup\; A(x)>k$$

$$|A(x)|\ge k \quad \Rightarrow \quad A(x)\le -k \;\cup\; A(x)\ge k$$

Sia $\boldsymbol{k < 0}$

$$
\begin{array}{lcl}
|A(x)| < k & \Rightarrow & \nexists\ x \in R \\
|A(x)| \leq k & \Rightarrow & \nexists\ x \in R \\
|A(x)| > k & \Rightarrow & \forall\ x \in C.E. \\
|A(x)| \geq k & \Rightarrow & \forall\ x \in C.E.
\end{array}
$$

Sia $\boldsymbol{k = 0}$

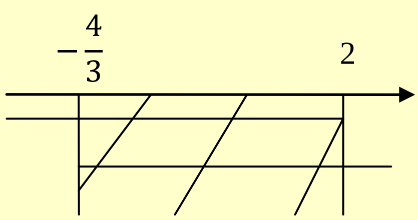
$$
\begin{array}{lcl}
|A(x)| < 0 & \Rightarrow & \nexists\ x \in R \\
|A(x)| \leq 0 & \Rightarrow & A(x) = 0 \\
|A(x)| > 0 & \Rightarrow & A(x) \neq 0 \\
|A(x)| \geq 0 & \Rightarrow & \forall\ x \in C.E.
\end{array}
$$

ESEMPI:

a) Risolvere la disequazione: $|3x-1| < 5$

È il caso $|A(x)| < k$, con $k > 0$, quindi la disequazione è equivalente a:

$$
\begin{cases} 3x-1<5 \\ 3x-1>-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x<6 \\ 3x>-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-\dfrac{4}{3} \end{cases}
$$

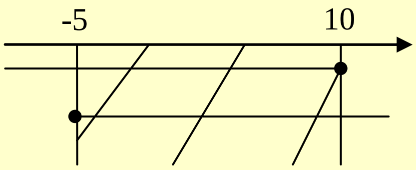


$$S = \left\{-\frac{4}{3} < x < 2\right\}$$

b) Risolvere la disequazione: $|2x-5| \leq 15$

È il caso $|A(x)| \leq k$, con $k > 0$, quindi la disequazione è equivalente a:

$$\begin{cases} 2x-5 \geq -15 \\ 2x-5 \leq 15 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x \geq -10 \\ 2x \leq 20 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 10 \end{cases}$$



$$S = \{-5 \leq x \leq 10\}$$

c) Risolvere la disequazione: $|3x+2| > 2$

È il caso $|A(x)| > k$, con $k > 0$, quindi la disequazione è equivalente a:

$$3x+2 < -2 \quad \cup \quad 3x+2 > 2$$
$$\Rightarrow \quad 3x < -4 \quad \cup \quad 3x > 0$$
$$\Rightarrow \quad x < \frac{3}{4} \quad \cup \quad x > 0$$

che corrisponde alla soluzione.

d) Risolvere la disequazione: $|2x-1| \geq 7$

È il caso $|A(x)| \geq k$, con $k > 0$, quindi la disequazione è equivalente a:

$$2x-1 \leq -7 \quad \cup \quad 2x-1 \geq 7$$
$$\Rightarrow \quad 2x \leq -6 \quad \cup \quad 2x \geq 8$$
$$\Rightarrow \quad x \leq -3 \quad \cup \quad x \geq 4$$

che corrisponde alla soluzione.

e) Risolvere la disequazione: $|2x-5| < -15$

È il caso $|A(x)| < k$, con $k < 0$, quindi è impossibile, cioè $\nexists\, x \in R$.

f) Risolvere la disequazione: $|x^2-2| \leq -1$

È il caso $|A(x)| \leq k$, con $k < 0$, quindi è impossibile, cioè $\nexists\, x \in R$.

g) Risolvere la disequazione: $|1-3x| > -5$

È il caso $|A(x)| > k$, con $k < 0$, quindi la disequazione è sempre verificata nel suo campo di esistenza, cioè $\forall\, x \in C.E.$.

h) Risolvere la disequazione: $|2x-1| \geq -8$

È il caso $|A(x)| \geq k$, con $k < 0$, quindi la disequazione è sempre verificata nel suo campo di esistenza, cioè $\forall\, x \in C.E.$.

i) Risolvere la disequazione: $|3-2x^3| < 0$

È il caso $|A(x)| < 0$, quindi la disequazione non è mai verificata, cioè $\nexists\, x \in R$.

j) Risolvere la disequazione: $|2x^2-4| \leq 0$

È il caso $|A(x)| \leq 0$, quindi la disequazione è verificata se e solo se

$$2x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=2 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2}$$

k) Risolvere la disequazione: $|5x+15| > 0$

È il caso $|A(x)| > 0$, quindi la disequazione è verificata se e solo se

$$5x+15 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -3$$

l) Risolvere la disequazione: $\left|\dfrac{3x-5}{7-x}\right| \geq 0$

L'espressione $\left|\dfrac{3x-5}{7-x}\right|$ è sempre positiva o nulla nel suo insieme di esistenza cioè per $x \neq 7$.

2) Disequazioni del tipo $|A(x)| < B(x),\ |A(x)| > B(x),\ |A(x)| \leq B(x),\ |A(x)| \geq B(x)$

L'insieme delle soluzioni delle varie disequazioni trattate in questo paragrafo, è l'unione degli insiemi delle soluzioni di due sistemi, come si evince dal seguente schema:

$$|A(x)| < B(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) < B(x) \end{cases}$$

$$|A(x)| > B(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) > B(x) \end{cases}$$

$$|A(x)| \le B(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ A(x) \le B(x) \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) \le B(x) \end{cases}$$

$$|A(x)| \ge B(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ A(x) \ge B(x) \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) \ge B(x) \end{cases}$$

ESEMPIO:

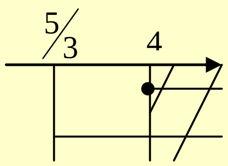
Risolviamo la disequazione $|x-4| > -2x+1$

La disequazione ha come soluzioni i valori appartenenti all'unione degli insiemi delle soluzioni dei seguenti sistemi:

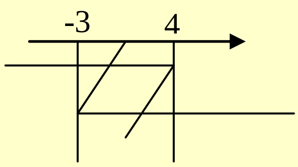
$$\begin{cases} x-4 \ge 0 \\ x-4 > -2x+1 \end{cases} \cup \begin{cases} x-4 < 0 \\ -x+4 > -2x+1 \end{cases}$$

risolvendo si ottiene

$$\begin{cases} x \ge 4 \\ x > \frac{5}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} x < 4 \\ x > -3 \end{cases}$$



$x \ge 4$



$-3 < x < 4$

Le soluzioni della disequazione sono quindi: $-3 < x < 4 \quad \cup \quad x \ge 4$ cioè $x > -3$.

3) Disequazioni con più moduli

Si procede come per le equazioni cioè si studia il segno di ogni argomento di valore assoluto e si considera l'unione di tanti sistemi quanti sono i casi ottenuti.

ESEMPIO:

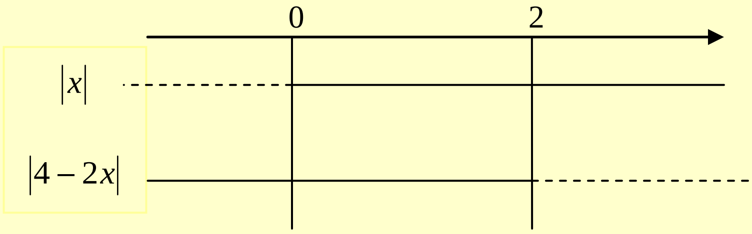
Risolviamo la disequazione: $|x| + |4-2x| < 3$

Si studiano i segni delle due espressioni contenute nei moduli ponendole maggiori di zero:

1° modulo: $x > 0$;

2° modulo: $4-2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 2$.

Si riportano poi in uno schema i risultati ottenuti.

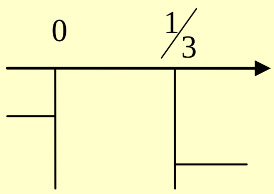


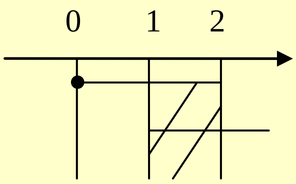
Otteniamo tre intervalli così che la disequazione risulta equivalente ai seguenti tre sistemi:

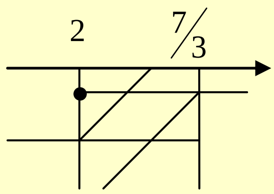
$$\begin{cases} x<0 \\ -x+4-2x<3 \end{cases} \cup \begin{cases} 0\le x<2 \\ x+4-2x<3 \end{cases} \cup \begin{cases} x\ge 2 \\ x-4+2x<3 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} x<0 \\ x>\dfrac{1}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} 0\le x<2 \\ x>1 \end{cases} \cup \begin{cases} x\ge 2 \\ x<\dfrac{7}{3} \end{cases}$$







Quindi la soluzione sarà $1<x<2 \quad \cup \quad 2\le x<\dfrac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad 1<x<\dfrac{7}{3}$