CAPITOLO 1

REGIMI FINANZIARI

1. OPERAZIONI FINANZIARIE

Si definisce **operazione finanziaria** un'operazione che riguarda l'impiego di somme di denaro che si protraggono nel tempo, ossia ogni contratto con il quale una persona ottiene la disponibilità di una somma di denaro ed in cambio si impegna a restituire dopo un certo periodo di tempo il denaro ricevuto in prestito più il compenso per l'uso di tale denaro.

Esempi di operazioni finanziarie:

1. il prestito di una somma S, stabilendo la restituzione dopo un anno di una somma maggiorata del 5%;
2. l'acquisto, da parte di un'impresa, di un bene del valore di 10.000 € per il quale è previsto uno sconto del 6%, se il pagamento avviene in contanti.
3. un deposito bancario.
4. il rimborso di un debito;
5. il leasing;
6. l'accantonamento semestrale di somme per la costituzione di un capitale dopo un numero n di semestri.

Elementi che caratterizzano le operazioni finanziarie:

- **capitale iniziale:** somma data in prestito (indicato con ***C***);
- **creditore o mutuante:** persona o ente che concede il prestito;
- **debitore o mutuatario:** persona o ente che riceve il prestito;
- **durata del prestito** periodo di tempo che intercorre tra l'inizio e la fine dell'operazione finanziaria (indicato con ***t***);
- **interesse** somma corrisposta a titolo di compenso a chi presta il capitale per un certo periodo (indicato con ***I***);
- **montante o capitale finale** somma comprensiva del capitale C e dell'interesse I alla fine dell'operazione finanziaria (indicato con ***M***);
- **tasso unitario d'interesse** rapporto fra l'interesse prodotto da un capitale e il capitale stesso, è riferito ad un determinato periodo di tempo indicato con ***i***);
- **tasso percentuale di interesse** rappresenta tasso unitario d'interesse moltiplicato per cento (indicato con ***r*).**

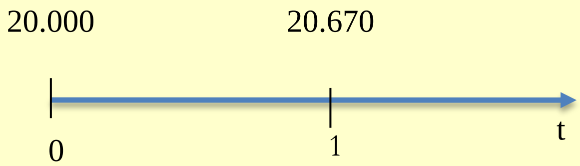
2. IL TEMPO

Nelle operazioni finanziarie il fattore tempo è un elemento importante, bisogna tener conto sia dell'istante in cui avviene lo scambio di capitali, sia dell'istante in cui il capitale verrà restituito.

Il tempo viene spesso rappresentato graficamente con un sistema cartesiano fissato su una retta orientata, chiamata **asse dei tempi** dove:

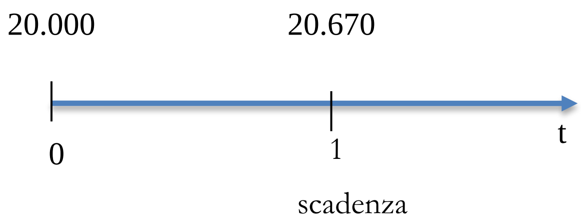
- **l'origine** rappresenta l'istante in cui si inizia a contare il tempo;
- **il verso** della retta indica il trascorrere del tempo;
- l'unità di misura rappresenta **l'unità di tempo** prescelta, per esempio anno, semestre , trimestre, bimestre, mese ecc.

ESEMPIO

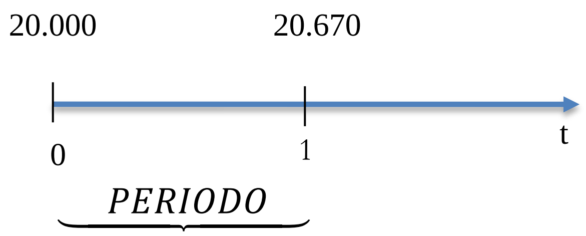


La **durata** di un'operazione finanziaria è il tempo che intercorre fra la cessione di un capitale e la sua completa restituzione. Può essere misurata in anni, semestri, quadrimestri, …ecc.

La **scadenza** è il momento in cui viene restituito il capitale o una parte dello stesso.



Il **periodo** è l'intervallo di tempo fra la scadenza di una somma e la successiva. Il periodo generalmente è costante , ma può avere anche durate diverse.



L'anno può essere, a seconda dei casi:

- civile di 365 giorni, dove i mesi hanno la loro effettiva durata;
- commerciale di 360 giorni, dove i mesi si considerano tutti di 30 giorni.

3. TASSO UNITARIO D'INTERESSE

Per calcolare il valore dell'interesse I si fissa il tasso unitario d'interesse che è il prezzo che il debitore deve pagare per poter usufruire di un capitale unitario per unità di tempo (anno, trimestre, mese, ecc…).

Si definisce **tasso unitario d'interesse,** l'interesse prodotto nell'unità di tempo da $1€$ di capitale. Se il periodo che si assume come unità di misura è l'anno, il tasso unitario d'interesse si dice annuo e si indica con i; se il periodo è il semestre, il tasso si dice unitario semestrale e si indica con i_2 dove il pedice 2 sta ad indicare il numero di semestri che ci sono in un anno, più in generale i_n indica il tasso unitario per il numero di periodi n che ci sono in un anno.

Normalmente viene anche utilizzato il **tasso percentuale**, indicato con $\boldsymbol{r}$, che rappresenta l'interesse prodotto da cento unità di capitale impiegate per un periodo assunto come unità di misura. Il tasso percentuale r si ottiene moltiplicando il tasso unitario d'interesse i per 100:

$$r = i \cdot 100$$

Viceversa il tasso i si ottiene dividendo r per 100:

$$i = \frac{r}{100}$$

ESEMPI

1. Se $i = 0{,}08$ è il tasso unitario d'interesse, il tasso percentuale r sarà: $r = 0{,}08 \cdot 100$ che si indica $r = 8\%$.

2. Se $r = 15\%$ il corrispondente tasso unitario sarà: $i = \frac{15}{100} = 0.15$.

ATTENZIONE!

Non devi confondere il tasso percentuale con il tasso unitario: se devi calcolare l'interesse prodotto da un capitale C ad un tasso r del 3%, devi prima trasformare r in i:

$$i = \frac{3}{100} = 0{,}03$$

.

4. CAPITALE INIZIALE, INTERESSE E MONTANTE

Come già detto il capitale iniziale C è il valore del capitale impiegato all'inizio dell'operazione finanziaria, mentre I è il compenso che spetta a colui che presta il capitale C per un certo periodo di tempo. Il valore dell'interesse dipende sia dall'entità del capitale che dalla durata del prestito, ma può dipendere anche da altri fattori (andamento del mercato finanziario, fiducia delle banche ecc.) di cui la matematica finanziaria non si occupa.

Si chiama invece montante M il valore del capitale al termine dell'operazione finanziaria

$$\boldsymbol{M = C + I}$$

Nei prossimi paragrafi ci occuperemo di calcolare il valore di I ed M.

5. REGIMI FINANZIARI

Fissato il tasso d'interesse unitario, per il calcolo dell'interesse e del montante, si possono eseguire procedimenti diversi, che dipendono dagli operatori finanziari e dai mercati in cui essi operano.

Si definisce **regime di capitalizzazione** ogni legge che permette di calcolare l'interesse e il montante prodotti da un capitale C, noti la durata e il tasso unitario d'interesse dell'operazione finanziaria.

In finanziaria, i regimi di capitalizzazione sono fondamentalmente due:

1) Regime di capitalizzazione semplice.

Generalmente si usa tale regime per operazioni finanziarie di breve periodo. In capitalizzazione semplice l'interesse non produce altro interesse, cioè è solo il capitale iniziale che "frutta" interessi.

2) Regime di capitalizzazione composta.

Generalmente si usa tale regime per operazioni finanziarie a medio e lungo termine. Nella capitalizzazione composta l'interesse risulta disponibile alla fine di ogni periodo di capitalizzazione producendo nuovi interessi, cioè risulta "fruttifero".

6. REGIME DI CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

Una legge si dice di **capitalizzazione semplice** quando l'interesse I è direttamente proporzionale al capitale C inizialmente investito, alla durata del tempo t e al tasso unitario d'interesse.
Si dice **interesse semplice I** il prodotto del capitale iniziale per il tasso d'interesse e per la durata del tempo impiegato.

$$I = C \cdot i \cdot t$$

Da questa relazione si ricava il modello per il calcolo diretto del montante:

$$M = C + I = C + C \cdot i \cdot t$$

Si ottiene così la seguente formula, detta **legge di capitalizzazione semplice:**

$$M = C(1 + i \cdot t)$$

E' importante notare che il tasso d'interesse deve essere commisurato all'unità di misura del tempo. Ad esempio se il tasso è unitario annuo, il tempo t deve essere espresso in anni e frazioni di anno: i mesi vanno indicati in $\frac{numero\ di\ mesi}{12}$, i giorni in $\frac{numero\ di\ giorni}{360}$ se si considera l'anno commerciale, oppure $\frac{numero\ di\ giorni}{365}$ se si considera l'anno civile.

ESEMPI

1) Se il tasso è annuo e l'impiego ha durata di 2 anni e 7 mesi si avrà: $t = 2 + \frac{7}{12}$

2) Se il tasso è annuo e l'impiego ha durata di 5 anni, 4 mesi e 15 giorni si avrà:

$t = 5 + \frac{4}{12} + \frac{15}{360}$ $(anno\ commerciale)$

$t = 5 + \frac{4}{12} + \frac{15}{365}$ $(anno\ civile)$.

3) Si calcoli l'interesse semplice prodotto da un capitale di 3.500 € impiegato al tasso annuo $i = 0{,}06$ per 7 mesi.

Dati: $C = 3.500$ €; $i = 0{,}06$; $t = 7\ mesi$

Si trasforma $t = \frac{7}{12}$

Applicando la relazione $I = C \cdot i \cdot t$ si ottiene $I = \left(3.500 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{7}{12}\right)$ € $= 122{,}5$ €.

4) Si calcoli l'interesse semplice prodotto da un capitale di 4.000 € impiegato al tasso annuo $i = 0{,}035$ per 1 anno e 6 mesi.

Dati: $C = 4.000$ €; $i = 0{,}035$; $t = 1\ anno\ e\ 6\ mesi$

Si trasforma $t = 1 + \frac{6}{12}$

Si ottiene $I = 4.000 \cdot 0{,}035 \left(1 + \frac{6}{12}\right)$ € $= 210$ €.

5) Si calcoli l'interesse semplice prodotto da un capitale di 10.300 € impiegato al tasso unitario trimestrale $i_4 = 0{,}0125$ per un anno e sei mesi.

Dati: $C = 10.300$ €; $i = 0{,}0125$; $t = 1\ anno\ e\ 6\ mesi$

Essendo il tasso trimestrale si avrà $t = \frac{12}{3} + \frac{6}{3} = 4 + 2 = 6$, quindi

$I = 10.300 \cdot 0{,}0125 \cdot 6 = 772{,}5$ €.

6) Si calcoli l'interesse semplice prodotto da un capitale di 10.300 € impiegato al tasso unitario semestrale $i_2 = 0{,}04$ per un anno, 2 mesi e 10 giorni.

Dati: $C = 10.300$ €; $i = 0{,}04$; $t = 1\ anno, 2\ mese\ e 10\ giorni$

Essendo il tasso unitario semestrale, si avrà $t = \frac{12}{6} + \frac{2}{6} + \frac{10}{180} = \frac{43}{18}$, quindi

$I = \left(10.300 \cdot 0{,}04 \cdot \frac{43}{18}\right)$ € $= 984$ €.

7) Si calcoli l'interesse semplice prodotto da un capitale di 6.000 € impiegato al tasso unitario bimestrale $i_6 = 0{,}025$ per 8 mesi e 20 giorni.

Dati: $C = 6.000$ €; $i = 0{,}025$; $t = 8\ mesi\ e\ 20\ giorni$

Essendo il tasso unitario semestrale, si avrà $t = \frac{8}{2} + \frac{20}{60} = \frac{13}{3}$, quindi

$I = \left(6.000 \cdot 0{,}025 \cdot \frac{13}{3}\right)$ € $= 650$ €.

8) Si determini l'interesse semplice ed il montante prodotti da un capitale di 12.000 € impiegato al tasso annuo dell'8%, rispettivamente per:

a) 3 anni
b) 4 anni e 5 mesi
c) 255 giorni.

a) Dati: $C = 12.000$ €; $i = 0{,}08$; $t = 3\ anni$

$I = 12.000 \cdot 0{,}08 \cdot 3 = 2880$ €

$M = 12.000 + 2880 = 14.880$ €

b) Dati: $C = 12.000\ €;$ $i = 0{,}08;$ $t = 4\ anni\ e\ 5\ mesi$

$$I = 12.000 \cdot 0{,}08 \cdot \left(4 + \frac{5}{12}\right) = 4.240\ €$$

$$M = 12.000 + 4240 = 16.240\ €$$

c) Dati: $C = 12.000\ €;$ $i = 0{,}08;$ $t = 255\ giorni$

$$I = 12.000 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{255}{360} = 680\ €$$

$$M = 12.000 + 680 = 12.680\ €$$

9) Si determini l'interesse semplice ed il montante prodotti da un capitale di $16.500\ €$ impiegato al tasso semestrale dell'3%, per 2 anni e 3 mesi.

Dati: $C = 16.500\ €;$ $i = 0{,}03;$ $t = 2\ anni\ e\ 3\ mesi$

$$I = 16.500 \cdot 0{,}03 \cdot \left(4 + \frac{3}{6}\right) = 2160\ €$$

$$M = 12.000 + 2.160 = 14.160\ €$$

10) Si determini il montante prodotto da un capitale di $5.800\ €$ impiegato al tasso annuo dell'2,5%, per 5 anni.

Dati: $C = 5.800\ €;$ $i = 0{,}025;$ $t = 5\ anni$

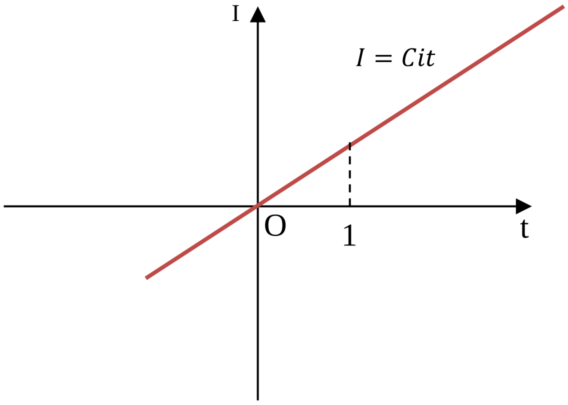
$$M = 5.800(1 + 0{,}025 \cdot 5) = 6.525\ €.$$

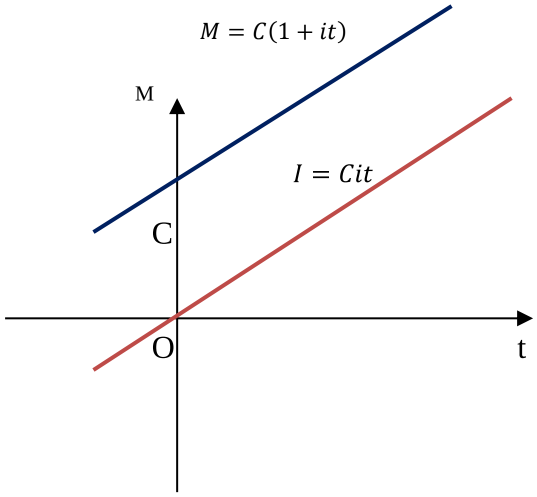
7. RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELL'INTERESSE E DEL MONTANTE

Vediamo ora la rappresentazione grafica delle leggi che stabiliscono i valori, in funzione del tempo, dell'interesse I e del montante M, in regime di capitalizzazione semplice.

Il grafico della $I = Cit$ rappresenta una retta passante per l'origine e coefficiente angolare Ci.

Il grafico della $M = C(1 + it)$ è una retta con medesimo coefficiente angolare della retta precedente (quindi è parallela), che interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0; C)$ dove C è il capitale iniziale.





8. PROBLEMI INVERSI

Attraverso leggi $I = Cit$ e $M = C(1 + it)$ possiamo risolvere tutti i problemi inversi, ricavando una qualunque quantità note le altre.

Vediamo alcuni esempi (come esercizio ricava tutte le formule inverse).

ESEMPI

1) Si calcoli il capitale che impiegato a interesse semplice al 7% annuo, ha fruttato in 10 mesi 5.000 € di interesse.

Dati: $I = 5.000$ €; $i = 0{,}07$; $t = 10\ mesi$

Utilizzando la relazione $I = Cit$ e sostituendo i dati si ottiene

$$5.000 = \boldsymbol{C} \cdot 0{,}07 \cdot 10$$

Da cui si ottiene $\boldsymbol{C} = \frac{5.000}{0{,}07 \cdot 10} = 7142.85$ €

2) A quale tasso di interesse semestrale un capitale di 1000 € produce in 7 mesi e 24 giorni un interesse di 60€.

Dati: $C = 1.000$ €; $I = 60$ €; $t = 7\ mesi\ e\ 24\ giorni$

Dopo aver trasformato il tempo in frazione di semestre:

$$t = \frac{7}{6} + \frac{24}{180} = \frac{13}{10}$$

Dalla relazione $I = Cit$, sostituendo si ottiene

$$60 = 1.000 \cdot \boldsymbol{i} \cdot \frac{13}{10}$$

$$6 = 130 \cdot \boldsymbol{i}$$

Da cui si ottiene il tasso semestrale $i_2 = 0{,}046$

3) Dopo quanto tempo 10.000 € producono un interesse semplice di 3.500 € se impiegati ad un tasso unitario annuo d'interesse del 6%?

Dati: $C = 10.000$ €; $I = 3.500$ €; $i = 0{,}06$

Dalla formula $I = Cit$, sostituendo i dati si ottiene

$$3.500 = 10.000 \cdot 0.06 \cdot \boldsymbol{t}$$

$$3.500 = 600 \cdot \boldsymbol{t}$$

Da cui si ottiene

$$t = 5{,}84$$

Che trasformiamo in anni, mesi e giorni:

$$\boldsymbol{5\ anni}$$
$$0{,}84 \cdot 12 = 10.08$$
$$\boldsymbol{10\ mesi}$$
$$0{,}08 \cdot 30 = 2{,}4$$
$$\boldsymbol{2\ giorni}$$

4) Determinare il capitale impiegato ad interesse semplice al 6% annuo per 8 mesi che dà un montante di 10.800 €.

Dati: $M = 10.800$ €; $i = 0{,}06$; $t = 8\ mesi$

Dalla formula $M = C(1 + it)$ sostituendo si avrà: $10.800 = C\left(1 + 0{,}03 \cdot \frac{8}{12}\right)$

Da cui si ricava $C = \frac{10.800}{\left(1+0{,}03 \cdot \frac{8}{12}\right)} = 10.385$ €

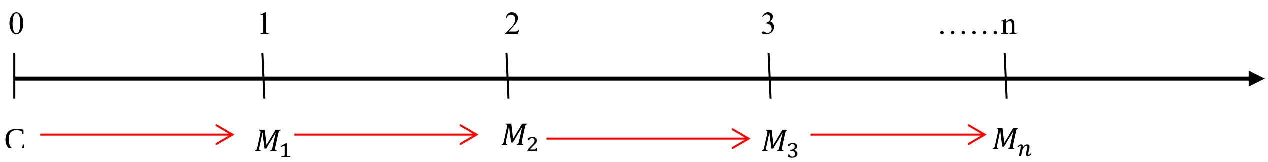
9. REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

Una legge di capitalizzazione si dice composta quando al termine di ogni intervallo di tempo, chiamato periodo di capitalizzazione, gli interessi semplici maturati vengono aggiunti al capitale e fruttano anch'essi.

La capitalizzazione semplice, di solito è usata per brevi periodi di tempo, generalmente non superiori all'anno, mentre le operazioni finanziarie a lunga scadenza si suddivide il tempo in periodi, generalmente uguali tra loro, e alla scadenza di ciascuno di essi, si calcolano gli interessi semplici che saranno aggiunti al capitale.

In linea di massima, la capitalizzazione degli interessi viene effettuata al termine di ogni anno d'impiego (capitalizzazione composta annua); può avvenire anche ogni sei mesi (capitalizzazione semestrale), o per altri periodi di frazione dell'anno.

Rappresentiamo la situazione:



Vediamo come si arriva alla legge di capitalizzazione composta mediante una formula che permetta il calcolo immediato del montante composto senza ricorrere a successive operazioni: indichiamo con C il capitale iniziale, con n il numero di periodi (anni, semestri, trimestri ecc.) e con i il tasso unitario relativo al periodo di capitalizzazione. Il montante di C dopo un anno sarà la somma:

$$M_1 = C + Ci = C(1 + i)$$

Durante il secondo anno il capitale messo a frutto non sarà più C, ma M_1 e quindi il montante di C alla fine del secondo periodo sarà: $M_2 = M_1(1 + i) = C(1 + i)^2$

Alla fine del terzo periodo si avrà: $M_3 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^3$

Procedendo si dimostra che alla fine $dell'n^{mo}$ periodo il montante composto sarà:

$$\boxed{M = C(1 + i)^n}$$

Il fattore $(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}$ si chiama **fattore di capitalizzazione composta**, e rappresenta il montante di 1 €, impiegata a interesse composto per n periodi, al tasso i.

L'interesse composto I si ricava dalle relazione $I = M - C$ e $M = C(1 + i)^n$

$$\boxed{\mathrm{I} = C(1 + i)^n - C = C[(1 + i)^n - 1]}$$

ESEMPI

1) Calcolare il montane di 10.000 € impiegati ad interesse composto per 7 anni al 4% annuo.

Dati: $C = 10.000$ €; $i = 0{,}04$; $n = 7\ anni$

Utilizzando la relazione $M = C(1 + i)^n$ e sostituendo i dati si ottiene

$$M = 10.000(1 + 0{,}04)^7$$

Da cui si ottiene $\boldsymbol{M} = 13160$ €

2) Calcola il montante di 10.000 € impiegati a interesse composto per 3 anni e 6 mesi al tasso semestrale del 3,5%.

Dati: $M = 10.000$ €; $i_2 = 0{,}035$; $n = 3\ anni\ e\ 6\ mesi = 7\ semestri$

Sostituendo si ha:

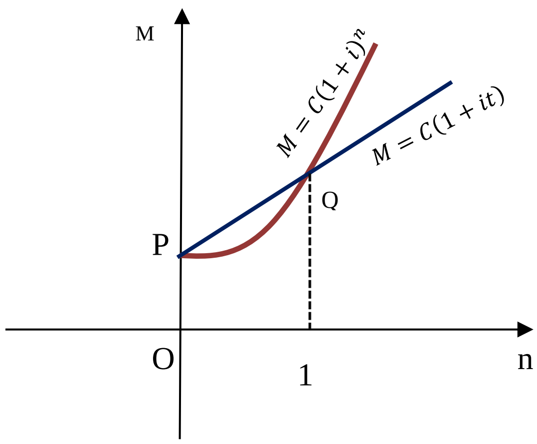
$$M = 10.000(1 + 0{,}035)^7$$

Da cui si ricava:

$$M = 12722{,}8$$

10. RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEL MONTANTE E DELL'INTERESSE

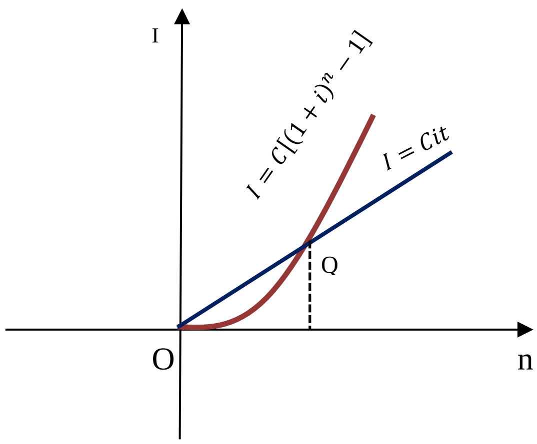
Consideriamo le due funzioni: $M = C(1 + it)$ e $M = C(1 + i)^n$ che rappresentano i montanti nella capitalizzazione, rispettivamente, semplice e composta. In un piano cartesiano la $M = C(1 + it)$ ha per grafico la semiretta di origine $P(0, C)$, di coefficiente angolare Ci e passa per il punto $Q\big(1; C(1 + i)\big)$. La legge $M = C(1 + i)^n$ è una funzione esponenziale, il cui grafico passa per i punti $P\ e\ Q$, è sempre crescente poiché la base è >1 e volge la concavità verso l'alto.



I punti della $\mathrm{M = C(1 + i)^n}$, hanno ordinate minori per $0 < \mathrm{n} < 1$ rispetto alla $\mathrm{M = C(1 + it)}$; mentre per $\mathrm{n} > 1$ hanno ordinate maggiori.

Analizzando i due grafici, è possibile concludere che, a parità di capitale di capitale iniziale e di passo:

1) Per $0 < n < 1$, il montante semplice è maggiore di quello composto;
2) Per $n > 1$ il montante semplice è minore di quello composto;
3) Per $n = 0\ e\ n = 1$ i due montanti sono coincidenti.



In modo analogo si possono trarre le stesse conclusioni del grafico precedente.

11. MONTANTE PER UN NUMERO NON INTERO DI PERIODI

La formula $M = C(1+i)^n$ per il calcolo del montante composto viene applicata nel caso in cui la durata dell'impiego del capitale sia costituita da n periodi, con $n \in N$. Spesso accade, però, che la durata dell'investimento sia rappresentata da periodi non interi, ad esempio: 6 anni, 7 mesi e 15 giorni. In questi casi, per calcolare il montante esistono due convenzioni:

1) CONVENZIONE LINEARE

Supponiamo che la durata dell'impiego sia una frazione che scriviamo nella forma: $t = n + \frac{c}{d}$ con $\frac{c}{d}$ frazione propria. In questo modo si calcola prima il montante composto del capitale C per n anni, ottenendo

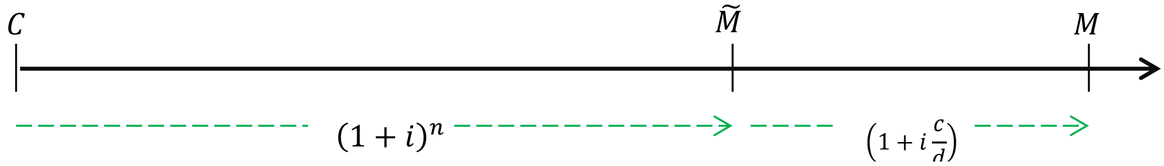
$$\tilde{M} = C(1+i)^n$$

e poi l'interesse semplice prodotto dal capitale $\tilde{M}$ per la parte residua della durata complessiva di impiego, rappresentata dalla frazione $\frac{c}{d}$ e si avrà:

$$I = \tilde{M} \cdot i \cdot \frac{c}{d}$$

si ottiene quindi la formula della **capitalizzazione mista**

$$M = \tilde{M} + I = C(1+i)^n \cdot \left(1 + i\frac{c}{d}\right)$$



ESEMPIO

Calcolare il montante impiegato per 3 anni e 5 mesi al tasso annuo $i = 0{,}04$ di un capitale di 6.500 €.

Dati: $C = 6.500$ €; $i = 0{,}04$; $n = 3\ anni\ e\ 5\ mesi$

Applicando la formula $M = C(1+i)^n \cdot \left(1 + i\frac{c}{d}\right)$ e sostituendo i dati si ottiene:

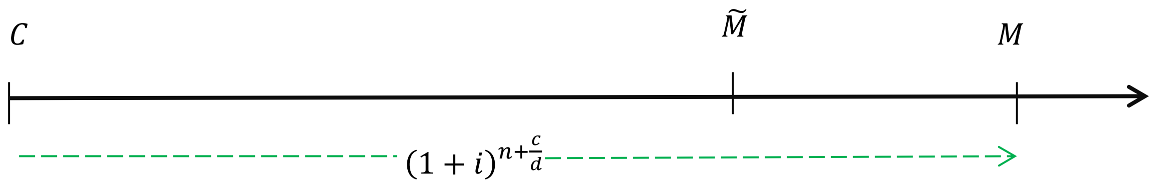
$M = 6.500(1+0{,}04)^3 \cdot \left(1 + 0{,}04 \cdot \frac{5}{12}\right) = 7433{,}50$ €.

2) ***CONVENZIONE ESPONENZIALE***

In questo caso si applica la legge di capitalizzazione composta per tutta la durata dell'investimento, ottenendo: $M = C(1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{c}{d}} = C(1+i)^{n+\frac{c}{d}}$

Quindi ponendo $t = n + \frac{d}{c}$ $\forall \boldsymbol{t \epsilon R}$, **il** montante M prodotto dal capitale C nel tempo t si otterrà applicando la formula:

$$\boxed{M = C(1+i)^t}$$



ESEMPIO

Utilizzando la convenzione esponenziale, calcolare il montante impiegato per 3 anni e 5 mesi al tasso annuo $i = 0{,}04$ di un capitale di 6.500 €.

Dati: $C = 6.500$ €; $i = 0{,}04$; $n = 3\ anni\ e\ 5\ mesi$

Applicando la formula $M = C(1+i)^t$ e sostituendo i dati si ottiene:

$M = 6.500(1+0{,}04)^{3+\frac{5}{12}} = 7432$ €.

12. PROBLEMI INVERSI

Dalla relazione $M = C(1+i)^t$ che lega il montante con il capitale, il tasso e il tempo è possibile ricavare le formule inverse per risolvere i relativi problemi.

1) ***CALCOLO DEL CAPITALE*** C quando siano noti M, i e t.

Risolvendo la $M = C(1+i)^t$ rispetto a C si ottiene:

$$\boxed{C = \frac{M}{(1+i)^t}}$$

Che risulta equivalente alla :

$$\boxed{C = M(1+i)^{-t}}$$

ESEMPI

1) Determinare il capitale che al tasso dello 0,025 annuo produce in 3 anni e 7 mesi un montante di 8.500 €.

Dati: $M = 8.500$ €; $i = 0{,}025$; $t = 3\ anni\ e\ 7\ mesi$

Applicando la formula $C = M(1+i)^{-t}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$C = 8.500(1+0{,}025)^{-\left(3+\frac{7}{12}\right)} = 7.780{,}21\ €.$$

2) Determinare il capitale che al tasso trimestrale dello 0,05 produce in 2 anni e 6 mesi un montante di 6.000 €.

Dati: $M = 6.000$ €; $i_4 = 0{,}05$; $t = 2\ anni\ e\ 6\ mesi = 10\ trimestri$

Applicando la formula $C = M(1+i)^{-t}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$C = 6.000(1+0{,}05)^{-10} = 3.683{,}48\ €$$

2) ***CALCOLO DEL TASSO i*** noti M, C e t.

Per ricavare il tasso d'interesse , noti il montante, il capitale e il tempo risolviamo la relazione $M = C(1+i)^t$ rispetto ad i, si ottiene:

$$(1+i)^t = \frac{M}{C}$$

quindi dividendo gli esponenti per t si ha: $(1+i)^{\frac{t}{t}} = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}}$

da cui segue la relazione:

$$\boxed{i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1}$$

oppure, se $t \in N$:

$$\boxed{i = \sqrt[t]{\frac{M}{C}} - 1}$$

ESEMPIO

Calcolare a quale tasso è stato impiegato un capitale di 4.800€ sapendo che dopo 5 anni il montante prodotto è stato di 7.500 € .

Dati: $M = 7.500\ €;$ $C = 4.800\ €;$ $t = 5\ anni$

Applicando la formula $i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$i = \left(\frac{7.500}{4.800}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.09$$

3) ***CALCOLO DEL TEMPO t*** noti M, C e i.

Per ricavare il tempo d'impiego, noti il montante, il capitale e il tempo risolviamo la relazione $M = C(1+i)^t$ rispetto a t passando ai logaritmi in base 10:

$$\text{Log}\, M = \text{Log}\, C\, (1+i)^t$$

Applicando le proprietà dei logaritmi si ottiene:

$$\text{Log}\, M = \text{Log}\, C + t\, \text{Log}(1+i)$$

$$t\, \text{Log}(1+i) = \text{Log}\, M - \text{Log}\, C$$

da cui segue la relazione:

$$t = \frac{\text{Log}\, M - \text{Log}\, C}{\text{Log}(1+i)}$$

oppure:

$$t = \frac{\text{Log}\left(\frac{M}{C}\right)}{\text{Log}(1+i)}$$

ESEMPIO

Determinare dopo quanto tempo un capitale di $5.700\ €$, impiegato ad un tasso del 4% annuo, dà un montante di $8.500\ €$ ad interesse composto.

Dati: $M = 8.500\ €;$ $C = 5.700\ €;$ $i = 0{,}04$

Applicando la formula $t = \frac{\text{Log}\, M - \text{Log}\, C}{\text{Log}(1+i)}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$t = \frac{\text{Log}\, 8.500 - \text{Log}\, 5.700}{\text{Log}(1+0{,}04)} = 10{,}18$$

10 anni; $0{,}18 \cdot 12 = 2{,}16$ *2 mesi;* $0{,}16 \cdot 30 = 4{,}8$ *4 giorni*

ESERCIZI RISOLTI

1) Calcolare il montante in capitalizzazione composta ottenuto impiegando 3.000 €, per 20 anni al 4% annuo.

Dati: $C = 3.000$ €; $i = 0{,}04$; $t = 20\ anni$

Dalla relazione $M = C(1+i)^t$ si ottiene direttamente:

$M = 3.000(1 + 0{,}04)^{20} = 6.573{,}37$€.

2) Tre anni fa Tizio ha impiegato a interessi composti prima la somma di 40.000€ al tasso del $7{,}5\%$ e dopo un certo periodo la somma di 15.000€ al tasso del 5%. Sapendo che oggi il montante complessivo è di 87.000€, dopo quanto tempo è stata effettuata la seconda operazione?

Dati: $C_1 = 40.000$ €; $i = 0{,}075$; $t_1 = 3\ anni$

$C_2 = 15.000$ €; $i = 0{,}05$; $t = incognita$

Impostiamo l'equazione: $40.000(1 + 0{,}075)^3 + 15.000(1 + 0{,}05)^t = 87.000$

Svolgendo i calcoli utilizzando i logaritmi e le relative proprietà si ottiene:

$$(1 + 0{,}05)^t = \frac{87.000 - 40.000(1 + 0{,}075)^3}{15.000}$$

$$Log(1 + 0{,}05)^t = Log\left[\frac{87.000 - 40.000(1 + 0{,}075)^3}{15.000}\right]$$

$$tLog(1 + 0{,}05) = Log\left[\frac{87.000 - 40.000(1 + 0{,}075)^3}{15.000}\right]$$

$$t = \frac{Log(0{,}40)}{Log(1 + 0{,}05)} = 18{,}67$$

$18\ anni,\ \ 8\ mesi\ \ e\ 12\ giorni.$

3) Determinare il montante prodotto in regime composto da un capitale di 5.800 €, investito in regime composto per 2 anni al tasso del 3% e per i successivi tre anni al tasso del 3,75%.

Dati: $C = 5.800$ €; $i = 0{,}03$; $t = 2\ anni$ $primo\ investimento$

$i = 0{,}0375$; $t = 3\ anni$ $secondo\ in\ vestimento$

Il montante calcolato direttamente sarà:

$$M = 5.800(1 + 0.03)^2(1 + 0{,}0375)^3 = 7005{,}82€$$

4) Consideriamo i seguenti investimenti:

- 6.500€ ad interesse semplice del 6%
- 7.000€ ad interesse semplice del 5%

Dopo quanto tempo i due montanti saranno uguali?

Dati: $C_1 = 6.500$ €; $i = 0{,}06$;

$C_2 = 7.000$ €; $i = 0{,}05$; $t = incognita$

Indicando con M_1 il montante ottenuto dal primo investimento e con M_2 quello ottenuto dal secondo investimento, dovrà risultare $M_1 = M_2$.

Impostiamo l'equazione e svolgiamo i calcoli:

$$6.500(1 + 0{,}06t) = 7.000(1 + 0{,}05t)$$

$$6.500 + 390t = 7.000 + 350t$$

$$40t = 500$$

Quindi $t = 12{,}5$ che corrisponde a $12\ anni\ e\ 6\ mesi$.

5) Sono stati impiegati ad interesse composto due capitali al medesimo tasso, uno di 10.000€ quattro anni fa e l'altro di 15.000€ due anni fa. Determina il tasso annuo comune d'impiego, sapendo che il montante disponibile oggi è di 18.000€.

Dati: $C_1 = 10.000$ €; $t = 4\ anni$;

$C_2 = 15.000$ €; $t = 2\ anni$; $i = incognita$

Impostiamo l'equazione che risolve il problema:

$$10.000(1 + i)^4 + 15.000(1 + i)^2 = 18.000$$

Utilizzando il procedimento visto per le equazioni trinomie poniamo $(1 + i)^2 = y$

Otteniamo l'equazione di secondo grado $10y^2 + 15y - 30 = 0$

Che risolta dà: $y = \frac{-15 \pm \sqrt{225+1200}}{20} = \begin{cases} 1{,}14 \\ -2{,}637\ non\ accettabile \end{cases}$

Sostituendo nella $(1 + i)^2 = y$ si avrà $(1 + i)^2 = 1{,}14$ ⇨ $i = 0{,}67$

13. OPERAZIONI DI SCONTO

Esaminiamo ora un'altra operazione finanziaria, lo sconto, che si applica ogni volta che un capitale viene pagato prima della scadenza prevista. Il creditore che voglia riscuotere il suo credito prima dell'epoca prestabilita, cioè prima della scadenza, è disposto a ricevere un importo ridotto. Di conseguenza chi effettua il pagamento anticipato non paga tutta la somma, ma ne trattiene una parte come compenso che viene chiamato sconto.

Vediamo alcune importanti definizioni:

- ✓ Si definisce **sconto**, e si indica con $\boldsymbol{S}$ il compenso che compete a chiunque anticipi il pagamento di un capitale.
- ✓ Si definisce **valore nominale** e si indica con $\boldsymbol{V_n}$, l'importo del debito dovuto alla scadenza.
- ✓ Si definisce **valore attuale o somma sco**ntata, e si indica con $\boldsymbol{V_a}$, la somma che viene pagata prima della scadenza del debito. E' la differenza tra il valore nominale e lo sconto.

$$V_a = V_n - S$$

Le leggi di sconto utilizzate nella pratica commerciale sono:

- ➢ Per le operazioni a breve scadenza si utilizzano:
  lo sconto commerciale
  lo sconto razionale
- ➢ Per operazioni con tempi di anticipazioni notevoli si utilizza:
  lo sconto composto.

14. LO SCONTO COMMERCIALE

Si dice che in un'operazione si è applicato uno **sconto commerciale** se lo sconto è direttamente proporzionale al valore nominale e al tempo si anticipazione.

$$S_c = V_n \cdot d \cdot t$$

Dove d indica il tasso unitario di sconto (che deriva dalla parola inglese discount).

Il tasso unitario di sconto d è un tasso d'interesse anticipato e rappresenta lo sconto che viene concesso all'inizio del periodo a un capitale unitario riscuotibile alla fine dello stesso periodo.

Dalla relazione $V_a = V_n - S$ si ottiene $V_a = V_n - V_n \cdot d \cdot t$ da cui si ricava:

$$V_a = V_n(1 - d \cdot t)$$

ESEMPI

1. Calcoliamo lo sconto commerciale che viene concesso a una persona che paga oggi un debito di $6.700€$ avente scadenza fra 9 mesi, sapendo che il tasso di sconto è $d = 0{,}06$.

   Dati: $V_n = 6.700\ €;$ $d = 0{,}06;$ $t = 8\ mesi$

   Applicando la relazione $S_c = V_n \cdot d \cdot t$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$S_c = 6.700 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{8}{12} = 268€$$

2. Carlo ha un debito di $3.000€$ scadente fra 7 mesi. Calcoliamo la somma scontata sapendo che gli è stato concesso uno sconto commerciale al tasso di sconto del 4,5%.

   Dati: $V_n = 3.000\ €;$ $d = 0{,}045;$ $t = 7\ mesi$

   Applicando la relazione $V_a = V_n(1 - d \cdot t)$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$V_a = 3.000\left(1 - 0{,}045 \cdot \frac{7}{12}\right) = 2921{,}25€$$

15. LO SCONTO RAZIONALE

Si dice che in un'operazione si è applicato uno **sconto razionale** se nel calcolo del valore attuale si utilizza la legge della capitalizzazione semplice. Questo è possibile perché ogni operazione di sconto può essere interpretata finanziariamente come un'operazione di capitalizzazione.

Poniamo $V_n = M$, $V_a = C$ e sostituiamo nella legge di capitalizzazione semplice $M = C(1 + it)$, otteniamo $V_n = V_a(1 + it)$ da cui deduciamo:

$$V_a = \frac{V_n}{(1 + it)}$$

Dalla relazione $S_r = V_n - V_a = V_n - \frac{V_n}{(1+it)}$ si ricava:

$$\boxed{S_r = \frac{V_n \cdot i \cdot t}{1 + it}}$$

Ricaviamo ora lo sconto razionale in relazione al tasso di sconto d.

Poniamo nella relazione $S_r = \frac{V_n \cdot i \cdot t}{1+it}$ $V_n = 1\ e\ t = 1$ si avrà:

$$S_r = \frac{i}{1+i}$$

che rappresenta lo sconto per ogni unità di capitale esigibile dopo un anno, cioè il tasso annuo di sconto, il tasso i rappresenta invece il tasso unitario d'interesse nella capitalizzazione semplice.

Sostituendo quindi $S_r\ con\ d$ nella relazione $S_r = \frac{i}{1+i}$ si avrà:

$$d = \frac{i}{1+i}$$

Da cui si ricava, con alcuni passaggi algebrici:

$$i = \frac{d}{1-d}$$

Sostituendo quest'ultima relazione nella formula $S_r = \frac{V_n \cdot i \cdot t}{1+it}$ si ottiene:

$$\boxed{S_r = \frac{V_n \cdot d \cdot t}{1-(1-t)\cdot d}}$$

Che viene utilizzata quando si conosce il tasso di sconto.

OSSERVAZIONE: come avrai certamente notato le funzioni $V_a = \frac{V_n}{(1+it)}$ e $S_r = \frac{V_n \cdot i \cdot t}{1+it}$ rappresentano delle funzioni omografiche. Prova a rappresentarle.

ESEMPIO

Calcoliamo lo sconto razionale che viene concesso a una persona che paga 5 mesi prima della scadenza un debito di $8.650€$, sapendo che il tasso di sconto annuo è $d = 0{,}06$.

Dati: $V_n = 8.650\ €;$ $d = 0{,}06;$ $t = 5 mesi$

Applicando la relazione $S_r = \frac{V_n \cdot d \cdot t}{1-(1-t)\cdot d}$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$S_r = \frac{8.650 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{5}{12}}{1-\left(1-\frac{5}{12}\right)\cdot 0{,}06} = 224{,}09€$$

Il problema può essere risolto anche ricavando prima il tasso d'interesse i tramite la formula $i = \frac{d}{1-d}$ e poi applicare la prima formula dello sconto razionale $S_r = \frac{V_n \cdot i \cdot t}{1+it}$.

16. LO SCONTO COMPOSTO

Si dice che in un'operazione si è applicato uno **sconto composto** se nel calcolo del valore attuale si utilizza la legge della capitalizzazione composta.

Poniamo $V_n = M,\ V_a = C$ e sostituiamo nella legge di capitalizzazione composta $M = C(1+i)^t$

otteniamo $V_n = V_a(1+i)^t$ da cui deduciamo:

$$V_a = \frac{V_n}{(1+i)^t} = V_n(1+i)^{-t}$$

Dalla relazione $S = V_n - V_a = V_n - V_n(1+i)^{-t}$ si ricava:

$$S = V_n[1-(1+i)^{-t}]$$

Se ora poniamo in quest'ultima relazione $V_n = 1\ e\ t = 1$

si ottiene:

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad e \quad i = \frac{d}{1-d}$$

E con alcuni passaggi algebrici si ottiene lo sconto commerciale in funzione del tasso di sconto d:

$$S = V_n[1-(1-d)^t]$$

ESEMPIO

Calcoliamo lo sconto composto che viene concesso a una persona che paga 3 anni prima della scadenza un debito di 4.000€, sapendo che il tasso unitari d'interesse dello 0,045.

Dati: $V_n = 4.000$ €; $i = 0{,}045$; $t = 3\ anni$

Applicando la relazione $S = V_n[1-(1+i)^{-t}]$ e sostituendo i dati si ottiene:

$$S = 4.000[1-(1+0{,}045)^{-3}] = 494{,}81€$$

17. CONFRONTO TRA LE LEGGI DI SCONTO

Dopo aver studiato i vari tipi di sconto ci chiediamo ora quale sia il più conveniente. Ovviamente la risposta a questa domanda dipende a seconda se ci si pone dal punto di visa del debitore o del creditore; per evitare fraintendimenti supponiamo di porci dal punto di vista del debitore (i risultati che otterremo saranno ovviamente considerati opposti per il creditore).

Vediamo un esempio:

1. Un tizio vuole estinguere oggi un debito di $10.000€$ che scade tra 10 mesi, stabilisce allora con il creditore un tasso annuo di sconto del 5%.

Quale tipo di sconto converrà che venga applicato al debitore?

DATI: $V_n = 10.000€;\quad d = 0{,}05;\quad t = 10\, mesi.$

Per rispondere alla domanda proviamo a calcolarli tutti e tre usando le formule dei valori attuali:

- Sconto commerciale $S_c = 10.000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{10}{12} = 416{,}\bar{6}€$
- Sconto razionale $S_r = \frac{10.000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{10}{12}}{1-\left(1-\frac{10}{12}\right)\cdot 0{,}05} = 420{,}168€$
- Sconto composto $S = 10.000\left[1-(1-0{,}05)^{\frac{10}{12}}\right] = 418{,}437€$

Per il debitore risulta più conveniente lo sconto commerciale perché in questo regime dobbiamo restituire una somma minore essendo $\boldsymbol{S_c < S < S_r}$

2. Supponiamo ora che lo stesso debito scada fra un anno, si avrà:

- Sconto commerciale $S_c = 10.000 \cdot 0{,}05 \cdot 1 = 500€$
- Sconto razionale $S_r = \frac{10.000 \cdot 0{,}05 \cdot 1}{1-(1-1)\cdot 0{,}05} = 500€$
- Sconto composto $S = 10.000[1-(1-0{,}05)^1] = 500€$

In questo caso sia per il debitore che per il creditore è indifferente usare un tipo di sconto o un altro $\boldsymbol{S_c = S = S_r}$.

3. Supponiamo ora che lo stesso debito scada fra 2 anni:

- Sconto commerciale $S_c = 10.000 \cdot 0{,}05 \cdot 2 = 1.000€$
- Sconto razionale $S_r = \frac{10.000 \cdot 0{,}05 \cdot 2}{1-(1-2)\cdot 0{,}05} = 952{,}380€$
- Sconto composto $S = 10.000[1-(1-0{,}05)^2] = 975€$

Per il debitore risulta più conveniente lo sconto razionale perché in questo regime dobbiamo restituire una somma minore $\boldsymbol{S_c > S > S_r}$

CONCLUSIONI:

$S_c = S = S_r$ se $t = 1$

$S < S_c < S_r$ se $0 < t < 1$

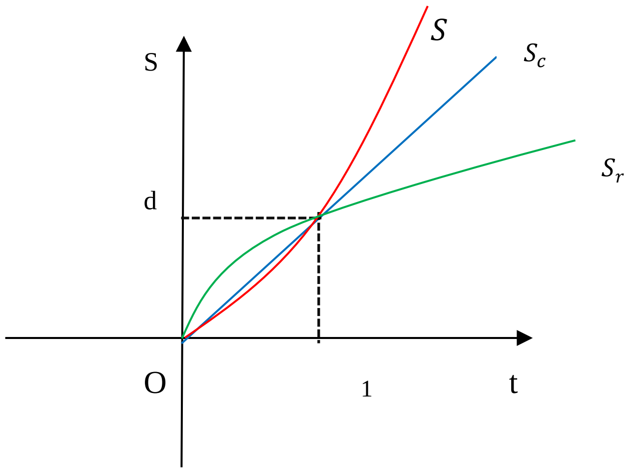
$S > S_c > S_r$ se $t > 1$

Vediamo che anche graficamente otteniamo lo stesso risultato

$S_c = V_n \cdot d \cdot t$ è una retta passante per l'origine

$S_r = \frac{V_n \cdot d \cdot t}{1-(1-t)\cdot d}$ è una funzione omografica

$S = V_n[1-(1-d)^t]$ è una funzione esponenziale



18. TRASPORTO DEI CAPITALI NEL TEMPO

Consideriamo le formule del montante nella capitalizzazione composta e del valore attuale nello sconto composto visti nei paragrafi precedenti

$M = C(1+i)^t$ e $V_a = V_n(1+i)^{-t}$

Sostituendo nella formula dello sconto $V_a = C$ e $V_n = M$ le due leggi diventano

$$M = C(1+i)^t \qquad e \qquad C = M(1+i)^{-t}$$

In *regime composto* le due leggi possono essere viste come un'unica legge considerando che, nel caso del montante, il capitale C è valutato dopo un periodo di tempo t positivo, mentre nel caso del valore attuale, C è valutato rispetto a un tempo $-t$ negativo.

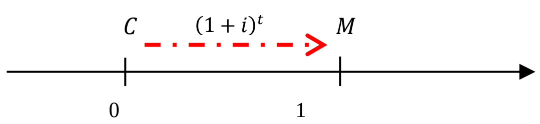
Quindi il fattore di capitalizzazione composta $(1+i)^t$ trasporta il capitale C:

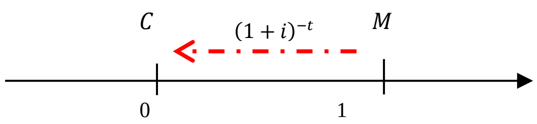
- avanti nel tempo se il suo esponente è positivo cioè se $t > 0$;
- indietro nel tempo se il suo esponente è negativo cioè se $t < 0$.

Possiamo quindi parlare semplicemente di *regime composto* senza più distinguere tra regime di capitalizzazione composta o regime di sconto composto.

La capitalizzazione porta un capitale in avanti nel tempo

Lo sconto porta un capitale indietro nel tempo





ESEMPIO

Consideriamo un capitale di 10.000 € che investiamo al tasso annuo del 5% in regime composto per 2 anni, si avrà:

- se andiamo avanti nel tempo $M = 10.000(1 + 0{,}05)^2 = 11.025€$ (capitalizzazione composta)
- se torniamo indietro nel tempo $C = 10.000(1 + 0{,}05)^{-2} = 9070{,}29€$ (sconto composto)

19. TASSI EQUIVALENTI

Sappiamo, da quanto visto nei paragrafi precedenti, che per applicare le leggi di capitalizzazione si deve avere una corrispondenza tra il periodo di capitalizzazione e il tasso unitario d'interesse impiegato, cioè se il periodo è l'anno il tasso deve essere annuo, se il periodo è il semestre il tasso deve essere semestrale e così via, può però succedere che la capitalizzazione degli interessi venga effettuata per periodi diversi rispetto al periodo di riferimento del tasso d'impiego.

Ad esempio: calcola il montante composto di un capitale di 10.000€ ad un tasso annuo del 5% per 5 anni e 4 mesi, sapendo che il periodo di capitalizzazione è trimestrale.

In questo caso per poter calcolare il montante, bisogna trasformare il tasso d'impiego in un tasso equivalente che abbia la stessa periodicità della capitalizzazione.

Quindi la definizione di ***tassi equivalenti*** sarà:

si dicono equivalenti due tassi (che indicheremo con i e i_k) che applicati allo stesso capitale e per la stessa durata, permettono di ottenere lo stesso montante.

Determiniamo ora le regole che trasformano un tasso in un altro equivalente nei due regimi di capitalizzazione semplice e composta.

1) Capitalizzazione semplice:

il montante relativo al tasso i è $M = C(1 + it)$

il montante relativo al asso i_k è $\widetilde{M} = C(1 + i_k t)$

essendo i tassi equivalenti dalla definizione si ottiene che i montanti devono essere uguali. $\boldsymbol{M = \widetilde{M}}$

quindi uguagliando le due espressioni si otterrà: $C(1 + it) = C(1 + i_k t)$

dividendo entrambi i membri per C e si avrà: $1 + it = 1 + i_k t$

svolgendo i dovuti passaggi algebrici si ottiene:

$$i = i_k \cdot k \qquad \textit{oppure} \qquad i_k = \frac{i}{k}$$

2) Capitalizzazione composta: supponiamo che la durata d'impiego sia di un anno,

il montante relativo al tasso i è $M = C(1 + i)$

il montante relativo al asso i_k è $\widetilde{M} = C(1 + i_k)^k$

essendo i tassi equivalenti dalla definizione si ottiene che i montanti devono essere uguali. $\boldsymbol{M = \widetilde{M}}$

quindi uguagliando le due espressioni si otterrà: $(1 + i) = (1 + i_k)^k$

dividendo entrambi i membri per C e si avrà: $1 + i = (1 + i_k)^k$

elevando entrambi i membri alla $\frac{1}{k}$ si ottiene $(1 + i)^{\frac{1}{k}} = [(1 + i_k)^k]^{\frac{1}{k}}$

da cui segue $(1 + i)^{\frac{1}{k}} = 1 + i_k$

svolgendo i dovuti passaggi algebrici si ottiene:

$$i_k = \sqrt[k]{1 + i} - 1 \qquad \textit{oppure} \qquad i = (1 + i_k)^k - 1$$

Si osserva che la relazione fra tassi equivalenti si può avere anche per tassi relativi a diverse frazioni di anno. Supponiamo di avere il tasso i annuo, il tasso i_k relativo periodo $\frac{1}{k}$ di anno e il tasso i_h relativo periodo $\frac{1}{h}$ di anno, abbiamo:

$$1 + i = (1 + i_k)^k \qquad \text{e} \qquad 1 + i = (1 + i_h)^h$$

Uguagliando i secondi membri avremo: $(1 + i_k)^k = (1 + i_h)^h$

Da cui si ottiene dopo alcuni passaggi algebrici:

$$i_k = (1 + i_h)^{\frac{h}{k}} - 1 \qquad h, k \in N^*$$

ESEMPI

1. Calcoliamo il tasso semestrale i_2 sapendo che è equivalente al tasso annuo composto del 3%.

Dati: $i = 0{,}03$

Dalla relazione $i_k = (1+i)^k - 1$ si ottiene $i_2 = (1+0{,}03)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}015$

2. Calcoliamo il tasso semestrale i_2 sapendo che è equivalente al tasso trimestrale composto del 3%.

Dati: $i_4 = 0{,}03$

Dalla relazione $i_k = (1+i_h)^{\frac{h}{k}} - 1$ si avrà $i_2 = (1+0{,}03)^{\frac{4}{2}} - 1 = 0.06$

20. TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

In regime di capitalizzazione composta il tasso semestrale *non* è uguale alla metà del corrispondente tasso annuo, oppure il tasso trimestrale *non* è uguale ad un quarto del corrispondente tasso annuo, ma risultano minori.

Vediamo con un esempio: vogliamo impiegare i nostri risparmi in banca, sapendo che una offre il 3% semestrale e l'altra il 6% annuo, quale risulta più conveniente?

Applicando la regola dei tassi equivalenti si ottiene: $i_2 = (1+0{,}06)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}02956$

Quindi possiamo dedurre che è più conveniente il tasso semestrale del 3%. Questo dipende dal fatto che, in capitalizzazione semestrale (o in modo analogo per altre frazioni di anno), l'interesse viene aggiunto al capitale ogni semestre e non ogni anno. Quindi possiamo concludere che $2i_2 < i$ e più in generale $k \cdot i_k < i$.

Si chiama **tasso nominale convertibile** il prodotto $k \cdot i_k$ che viene indicato con j_k.

$$j_k = k \cdot i_k$$

Questo tasso viene chiamato nominale perché non essendo il tasso effettivo non può essere utilizzato direttamente, ma può essere convertito nel corrispondente tasso relativo al periodo considerato, basta dividerlo per il numero dei periodi che ci sono nell'anno.

ESEMPIO

Calcoliamo il montante di 6.000€ impiegato per 5 anni, sapendo che il tasso annuo convertibile quadrimestralmente è del 6%.

Dati: $C = 6.000\,€$; $j_3 = 0{,}06$; $t = 5 anni$

$i_3 = \frac{j_3}{3} = \frac{0{,}06}{3}$=0,02

$$M = 6.000 \cdot (1 + 0{,}02)^{3 \cdot 5} = 8.075{,}21€$$

21. LEGGI SCINDIBILI E NON SCINDIBILI

Un'operazione finanziaria si dice scindibile se può essere divisa in due o più operazioni successive senza che venga modificato il risultato finale (montante o valore attuale), cioè se si arriva allo stesso risultato con una sola operazione o con più operazioni intermedie senza che vi sia interruzione tra un'operazione e la successiva, in caso contrario si dice non scindibile.

La scindibilità è una proprietà delle operazioni finanziarie, ma non è applicabile a tutte le leggi di capitalizzazione, vediamo a quali è applicabile.

1) Capitalizzazione semplice.

Consideriamo l'impiego di un capitale C, in regime di capitalizzazione semplice al tasso effettivo annuo *i* per la durata *t* anni. Alla scadenza si ottiene: $M = C(1 + it)$. Supponiamo ora, in riferimento all'operazione precedente che dopo t_1 anni $(con\, t_1 < t)$ il montante accumulato $M_1 = C(1 + it_1)$ venga riscosso e reinvestito, sempre alle stesse condizioni per t_2 anni. Alla scadenza si avrebbe il montante $M_2 = C(1 + it_2)$ e, supponendo che $t = t_1 + t_2$, possiamo ricavare che $M < M_2$; infatti:

$$\boldsymbol{M_2} = [C(1 + it_1)](1 + it_2) = C(1 + it_1 + it_2 + i^2 t_1 t_2) =$$
$$C[1 + i(t_1 + t_2) + i^2 t_1 t_2] > C[1 + i(t_1 + t_2)] = \boldsymbol{M}$$

In generale $$C \cdot (1 + it_1) \cdot (1 + it_2) \cdot \ldots \cdot (1 + it_n) > C(1 + it)$$

Questo accade perché, in regime di capitalizzazione semplice se l'impiego del capitale C avviene in un'unica operazione, l'interesse è sempre calcolato sullo stesso capitale C; se l'impiego avviene con due (o più operazioni), l'interesse è calcolato prima su C e poi su M_1 $(M_2, M_3, \ldots, M_n)$ che è maggiore di C, quindi $M < M_2$.

In modo analogo si può presentare la stessa situazione per il calcolo del valore attuale, nel caso dello *sconto razionale*, con i dovuti passaggi algebrici si otterrà: $\boldsymbol{V_a > V_{a_2}}$ cioè il valore attuale ottenuto con un'unica operazione finanziaria risulta maggiore di quello calcolato con due o più operazioni:

$$\frac{V_n}{1 + it_1} \cdot \frac{1}{1 + it_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1 + it_n} < \frac{V_n}{1 + it}$$

N.B.: Si può verificare che anche per lo *sconto commerciale* non è vale scindibilità del valore attuale. Possiamo concludere che **la capitalizzazione semplice *non* è scindibile**

ESEMPI

1) Calcoliamo il montante semplice prodotto da un capitale di 6.000 € impiegato al tasso del 6%:

a) Per complessivi 5 anni

b) Per 2 anni con reimpiego immediato del montante ottenuto per altri 3 anni, sempre allo stesso tasso.

caso a)

Dati: $C = 6.000$ €; $i = 0{,}06$; $t = 5\ anni$

$$M = 6.000(1 + 0{,}06 \cdot 5) = 7.800€$$

caso b)

Dati: $C = 6.000$ €; $i = 0{,}06$; $t_1 = 2\ anni$ $t_2 = 3\ anni$

$$M = 6.000(1 + 0{,}06 \cdot 2) = 6.720\ €$$

$$M = 6.720(1 + 0{,}06 \cdot 3) = 7.929{,}6\ €$$

Come si può notare, i montanti al tempo $t = 5$ *ottenuti nei due casi sono diversi.*

2) Calcoliamo il valore attuale corrispondente a 5.000 € impiegato al tasso del 3%:

a) Con $t = 6$ anni

b) Con $t_1 = 4$ e $t_2 = 2$

caso a)

Dati: $C = 5.000$ €; $i = 0{,}03$; $t = 6\ anni$

$$V_a = \frac{5.000}{(1+0{,}03 \cdot 6)} = 4.237{,}29€$$

caso b)

Dati: $C = 5.000$ €; $i = 0{,}03$; $t_1 = 4anni$ $t_2 = 2\ anni$

$$V_{a_1} = \frac{5.000}{(1+0{,}03 \cdot 4)} = 4.464{,}29€$$

$$V_{a_2} = \frac{4.464{,}29}{(1+0{,}03 \cdot 2)} = 4.211{,}59€$$

Come si può notare, i valori attuali al tempo $t = 6$ *ottenuti nei due casi sono diversi, risulta* $V_a > V_{a_2}$.

2) Capitalizzazione composta

Consideriamo l'impiego di un capitale C, in regime di capitalizzazione composta al tasso effettivo annuo *i* per la durata *t* anni. Alla scadenza si ottiene: $M = C(1+i)^t$.

Supponiamo ora, in riferimento all'operazione precedente che dopo t_1 anni $(con\ t_1 < t)$ il montante accumulato $M_1 = C(1+i)^{t_1}$ venga riscosso e reinvestito, sempre alle stesse condizioni per t_2 anni. Alla scadenza si avrebbe il montante $M_2 = C(1+i)^{t_2}$ e supponendo che $t = t_1 + t_2$, possiamo ricavare che $M = M_2$.

Infatti:

$$\boldsymbol{M_2} = M_1(1+i)^{t_2} = [C(1+i)^{t_1}](1+i)^{t_2} = C(1+i)^{t_1+t_2} = C(1+i)^t = \boldsymbol{M}$$

Quindi avendo trovato che $M = M_2$ **la capitalizzazione composta è una legge scindibile**, cioè risulta indifferente impiegare un capitale C per un tempo t, o per più tempi successivi la cui somma sia uguale a t.

In modo analogo si può presentare la stessa situazione per il calcolo del valore attuale, nel caso dello *sconto composto*, con i dovuti passaggi algebrici si otterrà: $\boldsymbol{V_a} = \boldsymbol{V_{a_2}}$ cioè il valore attuale ottenuto con un'unica operazione finanziaria risulta uguale a quello calcolato con due o più operazioni.

ESEMPI

1) Calcoliamo il montante composto prodotto da un capitale di 6.000 € impiegato al tasso del 6%:

a) Per complessivi 5 anni

b) Per 2 anni con reimpiego immediato del montante ottenuto per altri 3 anni, sempre allo stesso tasso.

caso a)

Dati: $C = 6.000$ €; $i = 0{,}06$; $t = 5\ anni$

$M = 6.000(1+0{,}06)^5 = 8.029{,}35$ €

caso b)

Dati: $C = 6.000$ €; $i = 0{,}06$; $t_1 = 2\ anni$ $t_2 = 3\ anni$

$M = 6.000(1+0{,}06)^2 = 6.741{,}6$ €

$M = 6.741{,}6(1+0{,}06)^3 = 8.029{,}35$ €

Come si può notare, i montanti al tempo $t = 5$ *ottenuti nei due casi sono uguali.*

2) Calcoliamo il valore attuale in regime composto corrispondente a 5.000 € impiegato al tasso del 3%:

a) Con $t = 6$ anni

b) Con $t_1 = 4$ e $t_2 = 2$

caso a)

Dati: $C = 5.000$ €; $i = 0{,}03$; $t = 6\ anni$

$$V_a = \frac{5.000}{(1+0{,}03)^6} = 4.187{,}42\ €$$

caso b)

Dati: $C = 5.000$ €; $i = 0{,}03$; $t_1 = 4 anni$ $t_2 = 2\ anni$

$$V_{a_1} = \frac{5.000}{(1+0{,}03)^4} = 4.442{,}43\ €$$

$$V_{a_2} = \frac{4.442{,}43}{(1+0{,}03)^2} = 4.187{,}42\ €$$

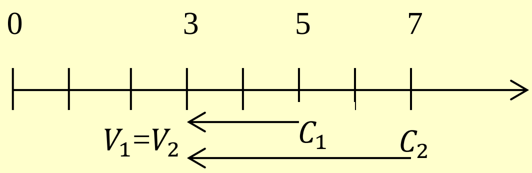
Come si può notare, i valori attuali al tempo $t = 6$ *ottenuti nei due casi sono uguali, risulta* $V_a = V_{a_2}$.

22. EQUIVALENZA FINANZIARIA

Si dice che in un dato regime finanziario due capitali, disponibili in scadenze diverse, sono equivalenti da un punto di vista finanziario, se riferiti ad una stessa epoca hanno valori uguali.

ESEMPIO

Consideriamo due capitali $C_1 = 4.774{,}05$ e $C_2 = 5.064{,}79$ e verifichiamo che sono equivalenti al tasso del 3%, quando calcoliamo il loro valore al tempo $t = 3$, sapendo che il primo è valutato all'epoca $t = 7$ e il secondo all'epoca $t = 5$.



Dati: $C_1 = 6.000$ €; $j_3 = 0{,}06$; $t = 5anni$

$$V_1 = 4.774{,}05 \cdot (1+0{,}03)^{-2} = 4.500\ €$$

$$V_2 = 5.064{,}79 \cdot (1+0{,}03)^{-4} = 4.500\ €$$

Osservazione: quando si dice che due tassi sono equivalenti è importante indicare a quale tasso lo sono, perché due tassi che sono equivalenti ad un certo tasso, non sono equivalenti ad un tasso diverso. Un'altra osservazione importante è che in regime composto, essendo valida la legge di scindibilità, non ha importanza l'epoca che scegliamo per il confronto; questo non è più valido in regime semplice dove l'equivalenza dipende dall'epoca di riferimento.