CAPITOLO 7

L'IPERBOLE EQUILATERA NEL PIANO CARTESIANO

1. L'EQUAZIONE DELL'IPERBOLE EQUILATERA

L'iperbole è il luogo dei punti del piano tale per cui la differenza delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante.

Le iperboli sono di vari tipi, ma noi studieremo solo l'unica iperbole interessante ai fini dell'economia matematica, cioè l'**iperbole equilatera riferita ai propri asintoti**, che d'ora in avanti chiameremo semplicemente iperbole.

L'equazione generica di questa funzione è

$$xy = k \quad \text{con} \quad k \in \mathcal{R} - \{0\}$$

Se $k > 0$ l'iperbole si trova nel I e III quadrante (figura 1) ed i suoi vertici si trovano come intersezioni della curva con la bisettrice del I-III quadrante; se $k < 0$ l'iperbole si trova nel II e IV quadrante (figura 2) ed i suoi vertici si trovano come intersezioni della curva con la bisettrice del II-IV quadrante. Inoltre è una curva simmetrica rispetto all'origine degli assi, che ne è il **centro**. Graficamente:

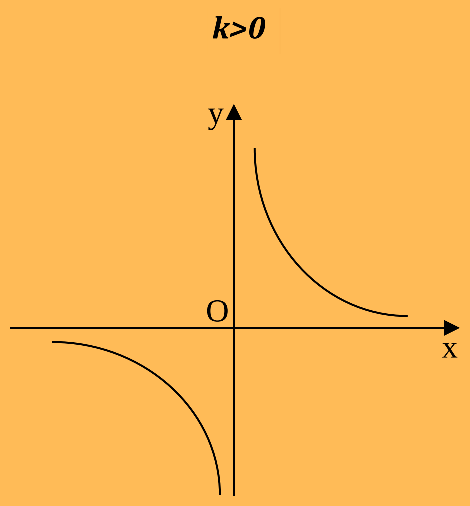


Figura 1

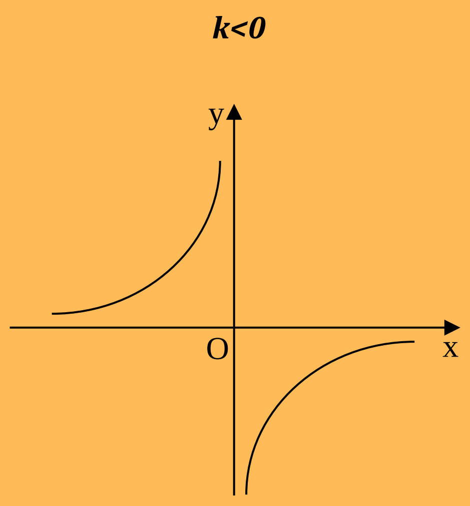


Figura 2

Come si vede dal grafico, l'iperbole non interseca gli assi, cioè non ha alcun punto di ascissa nulla, quindi, essendo $x \neq 0$, si può riscrivere la sua equazione come:

$$y = \frac{k}{x}$$

ESEMPIO:

Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, passante per il punto $A(3, -2)$. Determinare poi i vertici della curva.

Si consideri l'equazione generica dell'iperbole: $xy = k$

Si sostituiscono le coordinate del punto A nell'equazione e si ricava k:

$$3 \cdot (-2) = k \quad \Rightarrow \quad k = -6$$

Quindi: $$xy = -6$$

L'iperbole si trova quindi, essendo k negativo, nel II e IV quadrante. I suoi vertici saranno quindi i punti di intersezione dell'iperbole con la bisettrice di tali quadranti. Per trovarli si imposta il sistema tra l'equazione dell'iperbole e quella della bisettrice considerata:

$$\begin{cases} xy = -6 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(-x) = -6 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 = -6 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{6} \\ y = -x \end{cases}$$

Da cui si ottengono i vertici: $V_1\left(\sqrt{6};\ -\sqrt{6}\right)$ e $V_2\left(-\sqrt{6};\ \sqrt{6}\right)$

2. LA FUNZIONE OMOGRAFICA

Nel caso in cui l'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti non sia centrata nell'origine, bensì in un altro punto del piano, l'equazione della curva diventa:

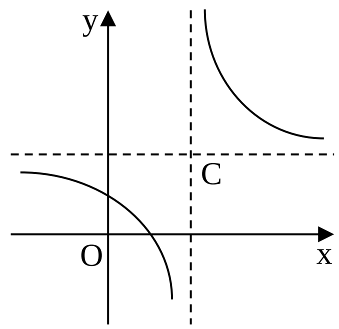
$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

con $c \neq 0$, altrimenti diventerebbe una retta, e $ad - bc \neq 0$, altrimenti diventerebbe una retta parallela all'asse x.

Tale curva prende il nome di funzione omografica ed il suo grafico è quello di un'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi cartesiani e centro di simmetria nel punto

$$C\left(-\frac{d}{c};\ \frac{a}{c}\right)$$

Per tale centro passeranno ovviamente gli asintoti paralleli agli assi.



ESEMPIO:

Determinare le coordinate del centro e dei vertici della seguente funzione omografica

$$y = \frac{3x+2}{x+2}$$

Il centro si ottiene applicando la formula:

$$C(-2,3)$$

I vertici sono i punti di intersezione della curva con la retta passante per il centro e parallela ad una delle bisettrici, nel nostro caso $y = -x$, quindi con $m = -1$. Tale retta ha quindi equazione

$$y - 3 = -1(x+2) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 1$$

Si imposta ora il sistema per trovare i punti di intersezione:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x+2}{x+2} \\ y = -x+1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x+1 = \dfrac{3x+2}{x+2} \\ y = -x+1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x^2 - x + 2 = 3x + 2 \\ y = -x+1 \end{cases} \qquad con \ x \neq -2$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$\begin{cases} -x^2 - 4x = 0 \\ y = x + 5 \end{cases}$$

Da cui $x = 0$ e $x = -4$, quindi i vertici avranno coordinate:

$$V_1(0,5) \quad \text{e} \quad V_2(-4,1)$$