CAPITOLO 6

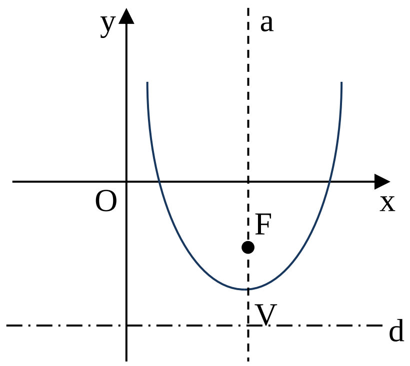
LA PARABOLA NEL PIANO CARTESIANO

1. L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA

Definizione: la **parabola** è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto **fuoco** e da una retta fissa detta **direttrice** d.

Riferiamo gli elementi del problema ad un sistema di assi cartesiani ortogonali. In questo capitolo considereremo, per semplicità, solo parabole con direttrice parallela all'asse x. Si chiama **asse della parabola** a la retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice; l'asse della parabola è la retta rispetto a cui la parabola è simmetrica e nel caso da noi trattato è una retta parallela all'asse y. Il punto di intersezione della parabola con il suo asse è detto **vertice** della parabola.

Graficamente:



Si omette, per semplicità, la dimostrazione di come si ottiene l'equazione della parabola dati fuoco e direttrice. L'equazione generica della parabola con asse parallelo all'asse y è una funzione di secondo grado del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a, b, c \in \mathcal{R}, \ \ a \neq 0$$

Osservazioni:

- Se $a = 0$ si otterrebbe una retta poiché l'equazione si abbasserebbe di grado.
- Se $a > 0$ la parabola volge la concavità verso l'alto.
- Se $a < 0$ la parabola volge la concavità verso il basso.
- Se $b = 0$ e $c \neq 0$ la parabola ha vertice sull'asse y.
- Se $b \neq 0$ e $c = 0$ la parabola passa per l'origine degli assi.
- Se $b = 0$ e $c = 0$ la parabola ha vertice nell'origine degli assi.

Per trovare gli elementi caratteristici di una parabola si utilizzano le seguenti formule (di cui si omette la dimostrazione):

$$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$$F\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}+\frac{1}{4a}\right)$$

$$d:\;\; y=-\frac{b^2-4ac}{4a}-\frac{1}{4a}$$

$$a:\;\; x=-\frac{b}{2a}$$

Per poter disegnare il grafico di una parabola è necessario calcolare il vertice (con la formula) e qualche punto della parabola usando la stessa tecnica del caso del grafico della retta (tabella di valori x, y), poi per simmetria rispetto all'asse della parabola si trovano i simmetrici dei punti trovati, e si traccia il grafico.

ESEMPIO:

Trovare gli elementi caratteristici della parabola $y=2x^2-4x+5$

Utilizzando le formule sopra citate si ottiene:

$$V\equiv\left(-\frac{-4}{2\cdot 2};-\frac{(-4)^2-4\cdot 2\cdot 5}{4\cdot 2}\right)\equiv(1;3)$$

$$F\equiv\left(-\frac{-4}{2\cdot 2};-\frac{(-4)^2-4\cdot 2\cdot 5}{4\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 2}\right)\equiv\left(1;\frac{25}{8}\right)$$

$$asse:\;\; x=1$$

$$direttrice:\;\; y=-\frac{(-4)^2-4\cdot 2\cdot 5}{4\cdot 2}-\frac{1}{4\cdot 2}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{23}{8}$$

2. POSIZIONE RECIPROCA TRA PARABOLA E RETTA

Per determinare i punti di intersezione tra una retta ed una parabola basta risolvere il sistema di secondo grado tra le equazioni della retta e della parabola.

Si possono presentare i seguenti casi:

1.	Il sistema ammette due soluzioni reali e distinte	$\Rightarrow$	Parabola e retta si intersecano in due punti distinti, cioè la retta è **secante** la parabola

2.	Il sistema ammette due soluzioni reali e coincidenti	$\Rightarrow$	Parabola e retta si intersecano in due punti coincidenti, cioè la retta è **tangente** alla parabola
3.	Il sistema è impossibile	$\Rightarrow$	Parabola e retta non hanno punti in comune, cioè la retta è **esterna** alla parabola
4.	Il sistema ammette una sola soluzione	$\Rightarrow$	Parabola e retta hanno un solo punto in comune: la retta è parallela all'asse della parabola.

ESEMPI:

a) Trovare i punti di intersezione tra la parabola di equazione $y = x^2 - 3x + 1$ e la retta di equazione $2x - y + 1 = 0$.

Si imposta il sistema tra le due equazioni:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 2x + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-5) = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5 \\ y = 11 \end{cases}$$

Quindi la retta è secante la parabola ed i punti di intersezione sono: $A(0,1)$ e $B(5,11)$.

b) Trovare i punti di intersezione tra la parabola di equazione $y = -2x^2 + 5x - 3$ e la retta di equazione $2x + y - 8 = 0$.

Si imposta il sistema tra le due equazioni:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 5x - 3 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x^2 + 5x - 3 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x^2 + 5x - 3 = -2x + 8 \\ y = -2x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x^2 + 7x - 11 = 0 \\ y = -2x + 8 \end{cases}$$

Risolviamo a parte l'equazione di secondo grado:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 88}}{-4}$$

E, dal momento che il discriminante è negativo, è impossibile. Quindi la retta e la parabola non si intersecano, cioè la retta è esterna alla parabola.

c) Trovare i punti di intersezione tra la parabola di equazione $y = 2x^2 + x - 3$ e la retta di equazione $x - 3 = 0$.

Si imposta il sistema tra le due equazioni:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 3 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x^2 + x - 3 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 18 \\ x = 3 \end{cases}$$

Quindi la retta e la parabola si intersecano in un solo punto $A(3, 18)$.

d) Trovare i punti di intersezione tra la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 5$ e la retta di equazione $2x + y - 4 = 0$.

Si imposta il sistema tra le due equazioni:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = -2x + 4 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{soluzione doppia}$$

Quindi la retta è tangente alla parabola ed i punti di intersezione, coincidenti, sono:

$$A \equiv B \equiv (1, 2)$$

3. PARABOLA PER TRE PUNTI

Per tre punti non allineati aventi ascisse distinte passa una ed una sola parabola; si vuole trovare la sua equazione conoscendo le coordinate dei tre punti.

Per risolvere tale quesito è necessario sostituire all'equazione generica della parabola le coordinate di ciascuno dei tre punti e poi risolvere il sistema lineare di tre equazioni in tre incognite (a, b, c) ottenuto.

Per maggior chiarezza si consideri l'esempio seguente.

ESEMPIO:

Determinare l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per i punti $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ e $C(-1, 10)$.

Si consideri l'equazione generica della parabola: $y = ax^2 + bx + c$

Si sostituiscano le coordinate dei tre punti in essa:

$$\begin{array}{l} punto\ A \\ punto\ B \\ punto\ C \end{array} \begin{cases} 2 = a + b + c \\ 1 = 4a + 2b + c \\ 10 = a - b + c \end{cases}$$

Si ricava la variabile a dalla prima equazione e la si sostituisce nelle altre due:

$$\begin{cases} a = 2 - b - c \\ 1 = 4(2 - b - c) + 2b + c \\ 10 = 2 - b - c - b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 - b - c \\ 1 = 8 - 4b - 4c + 2b + c \\ 2b = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 - b - c \\ 2b + 3c = 7 \\ b = -4 \end{cases}$$

Ora si sostituisce il valore di b nella seconda, si ricava c e si sostituiscono entrambi nella prima equazione:

$$\begin{cases} a = 2 - b - c \\ 2(-4) + 3c = 7 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 - b - c \\ 3c = 15 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 + 4 - 5 = 1 \\ c = 5 \\ b = -4 \end{cases}$$

Quindi l'equazione della parabola è:

$$y = x^2 - 4x + 5$$

4. PARABOLA NOTO UN PUNTO ED IL VERTICE

Si vuole trovare l'equazione di una parabola conoscendo le coordinate di un suo punto e le coordinate del suo vertice.

Per risolvere tale quesito è necessario sostituire all'equazione generica della parabola le coordinate del punto dato, le coordinate del vertice (che è comunque un punto della parabola), inoltre si uguaglia la formula dell'ascissa del vertice col valore noto e poi si risolve il sistema lineare di tre equazioni in tre incognite (a, b, c) ottenuto.

Per maggior chiarezza si consideri l'esempio seguente.

ESEMPIO:

Determinare l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per il punto $A(-1, -4)$ e avente vertice $V(2, 5)$.

Si consideri l'equazione generica della parabola: $y = ax^2 + bx + c$.

Si sostituiscano le coordinate di A, V e l'ascissa del vertice:

$$\begin{array}{l} punto\ A \\ punto\ V \\ ascissa\ V \end{array} \begin{cases} -4 = a - b + c \\ 5 = 4a + 2b + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \end{cases}$$

Si ricava la variabile b dalla terza equazione e la si sostituisce nelle altre due:

$$\begin{cases} -4 = a + 4a + c \\ 5 = 4a - 8a + c \\ b = -4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a + c = -4 \\ 4a - c = -5 \\ b = -4a \end{cases}$$

Ora si ricava c dalla prima equazione e si sostituisce nella seconda:

$$\begin{cases} c = -5a - 4 \\ 4a + 5a + 4 = -5 \\ b = -4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Quindi l'equazione della parabola è:

$$y = -x^2 + 4x + 1$$